Université de Bourgogne

Master en mathématiques fondamentales (PMG) 1ère année - Programme

Master in fundamental Mathematics (PMG)

1st year - Program

Langue : Français
Responsable : Peter Schauenburg (peter.schauenburg@u-bourgogne.fr)
Language: *French*
Coordinator: *Peter Schauenburg (peter.schauenburg@u-bourgogne.fr)*

Objectifs
Aims

Offrir une formation aux étudiants qui souhaitent s'orienter vers les métiers qui nécessitent des Mathématiques de haut niveau. La formation est généraliste en première année, puis plus spécialisée en deuxième année.

Provide training to students who wish to move towards jobs that require high-level of Mathematics. The training is general in the first year and more specialized in the second year.

Cours du semestre 1 (septembre - janvier)
Courses of Semester 1 (September - January)

MG1-1, Algèbre 1 (Cours obligatoire - 6 ECTS)
MG1-1, Algebra 1 (Compulsory course - 6 ECTS)

Dans ce cours, on étudie la théorie des anneaux commutatifs et les extensions de corps. Les notions de base de la théorie des anneaux, telles que les idéaux, les quotients, les éléments irréductibles et les éléments premiers sont introduites. Nous étudions également des concepts de domaines euclidiens, principaux, factoriels et noethériens. Le cas particulier des anneaux polynomiaux et de leurs quotients est discuté. Les chapitres suivants concernent l'étude des polynômes symétriques et du résultant de deux polynômes. Enfin, nous discutons les notions d'extensions de corps (éléments algébriques et transcendants, polynômes minimaux, corps de rupture, corps de décomposition), et nous décrivons la classification des corps finis.

This course covers the topics of commutative ring theory and of field extensions. The basic notions of ring theory, such as ideals, quotients, irreducible elements, and prime elements are discussed. We also introduce the concepts of principal ideal domains, and Euclidean, factorial and Noetherian domains. We study in detail the particular case of polynomial rings and their quotients. The next chapters concern the study of symmetric polynomials and the resultant of two polynomials. Finally, we discuss the notions of field extensions (algebraic and transcendental elements, minimal polynomials, rupture fields, splitting fields) and give a classification of finite fields.

MG1-2, Analyse 1 (Cours obligatoire - 6 ECTS)
MG1-2, Analysis 1 (Compulsory course - 6 ECTS)

Ce cours fait une synthèse approfondie autour des notions les plus importantes d'analyse : continuité, différentiabilité et intégrabilité. Partant des normes usuelles sur $\mathbf{R}^d$, un espace vectoriel normé est introduit. Des caractérisations sur des ensembles compacts sont établies, illustrées sur les fonctions continues. Ensuite, on introduit la notion de la différentielle d'une application, illustrée avec des matrices, la matrice hessienne est introduite pour étudier les extremums d'une fonction réelle. Enfin, on introduit la mesure de Lebesgue sur $\mathbf{R}^d$ par le théorème de Riesz, la formule de changement de variable est déduite de l'invariance par translations. On termine sur le théorème d'Ascoli et de Stone-Weierstrass et la séparabilité de $L^p(\mathbf{R}^d)$.

This course provides a profound synthesis on the most important notions in analysis: continuity, differentiability and integrability. Starting form usual norms on $\mathbf{R}^d$, a normed vector space is introduced. Characterization on compact sets are given with applications to continuous functions. We introduce then the notion of differential of an application, illustrated with examples of matrices. The Hessian matrix is introduced to study a problem of extremum. Finally we introduce the Lebesgue measure via Riesz representation theorem, the formula of change of variables is deduced from invariance by translations. The last part concerns Ascoli theorem and Stone-Weierstrass theorem and separability of $L^p(\mathbf{R}^d)$.

MG1-3, Analyse Complexe (Cours obligatoire - 6 ECTS)
MG1-3, Complex Analysis (Compulsory course - 6 ECTS)

Fonctions holomorphes et analytiques. Équations de Cauchy-Riemann. Intégrales curvilignes. Théorème et formule de Cauchy. Fonctions méromorphes, singularités et séries de Laurent. Formule des résidus. Théorème de Rouché.

Holomorphic and analytic functions. Cauchy-Riemann equations. Curvilinear integrals. Cauchy theorem and Cauchy formula. Meromorphic functions, singularities and Laurent series. Residue formula. Rouché Theorem.

MG1-4, Géométrie (Option - 6 ECTS)
MG1-4, Geometry (Option - 6 ECTS)

Géométrie affine : Géométrie affine sur un corps, notamment sur R. Barycentres, convexité ; groupe des transformations affines, points fixes ; quelques théorèmes classiques de géométrie affine. Géométrie euclidienne : Isométries, leurs décompositions en réflexions. Groupe orthogonal, compacité, connexité, simplicité. Quaternions. Décomposition polaire. Groupe euclidien affine. Géométrie projective : Espaces projectifs, ouverts affines, complété projectif d'un espace affine, dualité projective, homographies, repères projectifs, birapport, groupe des homographies, points fixes. Groupe linéaire : Groupes linéaires GLn, PGLn, SLn, PSLn, dénombrement sur des corps finis, générateurs du groupe linéaire, transvections, simplicité de PSLn, isomorphismes remarquables. Quadriques : formes quadratiques, éléments de classification (corps algébriquement clos, nombres réels, corps finis), quadriques projectives (quadriques lisses, hyperplan tangent, polarité), quadriques affines et euclidienne (classification en petite dimension). Groupe orthogonal généra : bases hyperboliques, espaces isotropes , théorème de Cartan-Dieudonné, théorème de Witt.

Affine geometry : Affine geometry over a field, especially over R, barycenters, convexity, affine transformation group, fixed points, classical theorems of affine geometry. Euclidean geometry : Isometries, decomposition into reflections, orthogonal group, compactness and connectedness, simplicity, quaternions, polar decomposition, affine euclidean group. Projective geometry : Projective spaces, affine charts, projective completion of affine spaces, projective duality, homographies, projective frames, cross-ratio, group of homographies, fixed points. Linear group : GLn, PGLn, SLn, PSLn, counting on finite fields, generators of the linear group, transvections, simplicity of PSLn, remarkable isomorphisms. Quadrics : quadratic forms, classification over algebraically closed fields, real numbers, finite fields, projective quadrics (smooth quadrics, tangent hyperplane, polarity), affine and euclidean quadrics (classification in low dimension). General orthogonal group : hyperbolic bases, isotropic subspaces, Cartan-Dieudonné Theorem, Witt Theorem.

MIGS1-2, Probabilités (Option - 6 ECTS)
MIGS1-2, Probability (Option - 6 ECTS)

La première moitié du cours concerne la caractérisation des lois de probabilité et la caractérisation de la convergence en loi. On traitera notamment les caractérisations par la fonction de répartition, la fonction caractéristique ou plus généralement diverses caractérisations fonctionnelles. On illustrera ces résultats en démontrant le théorème de Lévy que l'on appliquera pour démontrer le théorème central limite. Ceci sera également l'occasion d'aborder la notion de vecteurs Gaussiens. La seconde moitié du cours porte sur la notion fondamentale d'espérance et de lois conditionnelles, notions élémentaires dans le cadre discret qui s'avèrent bien plus théoriques dans le cadre général. Ces deux notions sont des prérequis essentiels pour introduire les notions de martingales et de chaînes de Markov du cours d'Algorithmes Stochastiques au second semestre.

To begin with, the course deals with the characterization of probability distributions and their convergence. For instance with the distribution function, the characteristic function or more generally with various other functional characterizations. We will illustrate these results by demonstrating Lévy's theorem and the central limit theorem. This will be the opportunity to study Gaussian vectors. The second half of the course deals with the fundamental notions of conditional expectation and transition kernels. Those are elementary in the discrete framework which turn out to be much more theoretical in the general one. These two notions are essential prerequisites to introduce the notions of martingales and Markov chains of the Stochastic Algorithms course in the second semester.

Cours du semestre 2 (janvier - mai)
Courses of Semester 2 (January - May)

MG2-1, Algèbre 2 (Cours obligatoire - 6 ECTS)
MG2-1, Algebra 2 (Compulsory course - 6 ECTS)

Rappels sur les groupes et exemples : groupes diédraux, groupes symétriques, groupes linéaires (sur des corps finis), produit semi-direct, groupes de permutations signées. Produit tensoriel d'espaces vectoriels : propriété universelle, bases, produit tensoriel d'applications linéaires. Représentations linéaires des groupes finis : définition, exemples, représentation régulière, sous-repésentation, décomposition en somme directe de représentations irréductibles, produit tensoriel, carré symétrique, carré alterné. Théorie des caractères : Définition, caractère d'une somme, caractère d'un produit tensoriel, Lemme de Schur, orthonormalité des caractères simples, décomposition de la représentation régulière. Groupes et géométrie : Espace affine euclidien, groupe des isométries, coordonnées barycentriques, groupes des isométrie d'un solide, cas des polygones réguliers, des simplexes et des n-cubes. Sous-groupes de SO(3) : classification des polyèdres réguliers, classification des sous-groupes finis de SO(3).

Reminders on groups and examples: dihedral groups, symmetric groups, linear groups (on finite fields), semi-direct product, groups of signed permutations. Tensor product of vector spaces: universal property, bases, tensor product of linear applications. Linear representations of finite groups: definition, examples, regular representation, subrepresentation, decomposition as a direct sum of irreducible representations, tensor product, symmetric square, alternating square. Character theory: Definition, character of a sum, character of a tensor product, Schur lemma, orthonormality of simple characters, decomposition of a regular representation. Groups and geometry: Euclidean affine space, group of isometries, barycentric coordinates, groups of isometries of a solid, cases of a regular polygons, of an n-simplex and of an n-cube. Subgroups of SO(3): classification of regular polyhedra in dimension 3, classification of finite subgroups of SO(3).

MG2-2, Analyse 2 (Cours obligatoire - 6 ECTS)
MG2-2, Analysis 2 (Compulsory course - 6 ECTS)

L'objectif de ce cours est de présenter la théorie des distributions (L. Schwartz), qui en généralisant la notion de fonction, permet de résoudre de nombreuses équations de la physique (équations différentielles ou aux dérivées partielles). Programme : Rappels de calcul différentiel, construction de fonctions test, les distributions (définition, dérivation, support, produit de convolution), la famille des distributions tempérées (espace de Schwartz, transformée de Fourier d'une distribution), la résolution d'équations en utilisant les solutions fondamentales.

The aim of this course is to present the theory of distributions (introduced by L. Schwartz). It is not always convenient to solve equations associated with physical problems (differential or partial differential equations) using classical functions, it could be easier to deal with more general mathematical objects called "distributions". We need therefore to define carefully all their properties. Contents: Smooth functions, test functions, distributions (definition, differentiation, support, convolution) and temperate distributions (space of rapidly decreasing functions, Fourier transform), fundamental solutions of differential operators.

MG2-3a, Mémoire (Cours obligatoire - 3 ECTS)
MG2-3a, Dissertation (Compulsory course - 3 ECTS)

Pour le mémoire le travail demandé à chaque étudiant sera la rédaction d'un rapport d'environ 20-30 pages en Latex au format 11pt. Une soutenance de 25 minutes (suivie de 15 minutes de questions) devra démontrer que les étudiants maîtrisent les mathématiques contenues dans le mémoire.

Each student is required to write a report of about 20-30 pages long in Latex in 11pt format. A 25-minute defense (followed by 15 minutes of questions) must show that the student masters the mathematics contained in the dissertation.

MG2-3b, Anglais (Cours obligatoire - 3 ECTS)
MG2-3b, English (Compulsory course - 3 ECTS)

L'objectif de ce cours est d'approfondir l'ensemble des compétences d'expression et de compréhension écrites et orales en anglais de spécialité. Ce travail s'inscrit dans la continuité de celui effectué en L3 Mathématiques et qui se poursuivra en M2, avec un accent mis sur l'écrit en M1 et sur l'oral en M2. Les étudiants apprennent à maîtriser le langage propre aux mathématiques (lexique, éléments de phonologie, lecture de formules et de graphiques simples…) Y sont traités des sujets ayant trait aux mathématiques à travers des supports variés, récents et authentiques.

The objective of this course is to improve all of the skills of written and oral expression and comprehension in specialized English. This work is a continuation of the work done in L3 Mathematics and will continue in M2, with an emphasis on the written skills in M1 and the oral ones in M2. Students learn to master the language of mathematics (lexicon, phonology, reading simple formulas and graphs, etc.). Mathematical topics are covered through a variety of recent and authentic materials (press articles, videos...)

MIGS2-1, Algorithmes Stochastiques (Option - 6 ECTS)
MIGS2-1, Stochastic Algorithms (Option - 6 ECTS)

Les variables aléatoires ne suffisent pas toujours pour décrire une situation dépendant du hasard. Parfois, il faut pouvoir décrire l'évolution de la situation au cours du temps et alors utiliser des suites de variables aléatoires appelées aussi processus stochastiques à temps discret (martingales ou chaînes de Markov). L'objet du cours est de combiner une exploration théoriques des processus stochastiques à une approche algorithmique mise en oeuvre sur des applications concrètes (utilisation de python). Au programme : Génération de nombres aléatoires, méthodes de Monte-Carlo pour l'intégration, étude des martingales (théorème d'arrêt et théorèmes limites) et des chaînes de Markov (classification des états et théorèmes ergodiques). Prérequis: cours de probabilités niveau master (notion d'espérance conditionnelle).

Random variables or random vectors are crucial in the study of applied mathematical models. However it is sometimes important to understand how the situation evolves over time: time-discrete stochastic processes are therefore introduced (martingales or Markov chains). The aim of this course is to combine a theoretical approach of stochastic processes and an algorithmic approach in connection with applications (use of the python language). Content: Random variable generation, Monte Carlo integration, study of martingales (Stopping and convergence theorems) and Markov chains (recurrence, transience, ergodic theorems). Prerequisite: a course on conditional expectation (Probability theory).

MIGS2-2, Statistique Inférentielle (Option - 6 ECTS)

MIGS2-2, Statistical Inference (Option - 6 ECTS)

Ce cours présente les outils de base pour l'inférence statistique. Modèles statistiques et estimateurs : définition, biais et risque quadratique. Méthode des moments et estimateurs du maximum de vraisemblance, information de Fisher et borne de Cramer-Rao. Estimation par intervalles, tests d'hypothèses (rapport de vraisemblance, les tests du khi-2). Estimation et inférence dans le modèle linéaire Gaussien. TP sous R.

This course presents the basic tools for statistical inference. Statistical models and estimators : definition, bias and quadratic risk. The method of moments and maximum likelihood estimators. Fisher information and Cramer-Rao bound. Confidence intervals, hypothesis testing (likelihood ratio tests, khi-2 tests). Estimation and inference in the Gaussian linear regression model. Practice with R.