Université de Bourgogne
UFR Sciences et Techniques

Année 2022-2023
Janvier 2023

Algèbre 1
Examen

Question de cours. Soient A un anneau commutatif et I, J deux idéaux de A.

(1) Montrer que, si $I + J = A$, alors $IJ = I \cap J$.

(2) Montrer que, si $I + J = A$, alors $A/(IJ) \simeq (A/I) \times (A/J)$.

Exercice 1. Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$.

(1) Soient $\gamma = (a_1, a_2, \ldots, a_p)$ un cycle de longueur $p \geq 2$ dans $\mathfrak{S}_n$ et $\sigma \in \mathfrak{S}_n$. Déterminer $\sigma \circ \gamma \circ \sigma^{-1}$.

(2) Soient $\gamma = (a_1, a_2, \ldots, a_p)$ un cycle de longueur $p \geq 2$ dans $\mathfrak{S}_n$ et $b_1, b_2, \ldots, b_p \in \{1, \ldots, n\}$ deux à deux différents. Montrer que $\gamma = (b_1, b_2, \ldots, b_p)$ si et seulement s'il existe $k \in \{0, 1, \ldots, p-1\}$ tel que $b_i = \gamma^k(a_i)$ pour tout $i \in \{1, \ldots, p\}$.

(3) Le *centralisateur* d'un élément $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ est $Z_{\mathfrak{S}_n}(\sigma) = \{\tau \in \mathfrak{S}_n \mid \tau \circ \sigma = \sigma \circ \tau\}$. Montrer que $Z_{\mathfrak{S}_n}(\sigma)$ est un sous-groupe de $\mathfrak{S}_n$.

(4) Soit $\gamma = (a_1, a_2, \ldots, a_p)$ un cycle de longueur $p \geq 2$ dans $\mathfrak{S}_n$. On pose $E = \{1, \ldots, n\} \setminus \{a_1, \ldots, a_p\}$ et on note $\mathfrak{S}(E)$ le sous-groupe de $\mathfrak{S}_n$ formé des permutations dont le support est inclus dans E. Soit $\tau \in \mathfrak{S}_n$. Montrer que $\tau \in Z_{\mathfrak{S}_n}(\gamma)$ si et seulement s'il existe $\mu \in \mathfrak{S}(E)$ et $k \in \{0, 1, \ldots, p-1\}$ tels que $\tau = \mu \circ \gamma^k = \gamma^k \circ \mu$.

Exercice 2. Soit A un anneau. On sait que l'application $\varphi : \mathbb{Z} \to A$ qui à $n \in \mathbb{Z}$ associe $n \cdot 1_A$ est un homomorphisme d'anneaux. Son noyau est un idéal de $\mathbb{Z}$, donc est de la forme $p\mathbb{Z}$ avec $p \in \mathbb{N}$. L'entier p ainsi défini s'appelle la *caractéristique* de A et se note $\chi(A)$.

(1) Soit $p = \chi(A)$. Montrer que $p \neq 1$. Montrer que, si $p = 0$, alors φ est injectif. Montrer que, si $p \geq 2$, alors φ induit un homomorphisme injectif $\overline{\varphi} : \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \to A$.

(2) Montrer que, si A est intègre, alors sa caractéristique est soit 0 soit un nombre premier.

(3) Donner un exemple d'un anneau A de caractéristique 0 qui ne soit pas intègre.

(4) Soit K un corps. Montrer que K ne contient que deux idéaux, $\{0\}$ et K. En déduire que, si $\psi : K \to B$ est un homomorphisme de K dans un anneau B, alors ψ est injectif.

(5) Soit K un corps de caractéristique 0. Montrer que K contient un sous-corps isomorphe à $\mathbb{Q}$.

Exercice 3. Rappelons que l'ensemble des entiers de Gauss est $\mathbb{Z}[i] = \{a + ib \mid a, b \in \mathbb{Z}\} \subset \mathbb{C}$.

(1) Montrer que $\mathbb{Z}[i]$ est un sous-anneau de $\mathbb{C}$.

(2) Déterminer $\mathcal{U}(\mathbb{Z}[i])$.

(3) Montrer que $\mathbb{Z}[i]$ est un anneau euclidien.

(4) Soit p un nombre premier (dans $\mathbb{N}$). Montrer que p est un élément irréductible de $\mathbb{Z}[i]$ si et seulement si p n'est pas la somme de deux carrés entiers.