Université de Bourgogne
UFR Sciences et Techniques

Année 2022-2023
Juin 2023

Algèbre 1
Examen

Question de cours 1. Soient G un groupe abélien et H un sous-groupe de G.

(1) Montrer que la relation "être congru modulo H" est une relation d'équivalence. Montrer que, pour tous $a, b, c, d \in G$, si $a \equiv b \pmod H$ et $c \equiv d \pmod H$, alors $(a+c) \equiv (b+d) \pmod H$.

(2) Donner la définition de l'addition dans G/H et montrer que G/H muni de cette opération est un groupe abélien.

Question de cours 2. Soit A un anneau intègre. Rappelons que $A^* = A \setminus \{0_A\}$. On définit une relation $\sim$ sur $A \times A^*$ par

$$(a_1, b_1) \sim (a_2, b_2) \quad \text{si} \quad a_1 b_2 = a_2 b_1 .$$

On admet que $\sim$ est une relation d'équivalence. La classe d'équivalence d'une paire $(a, b) \in A \times A^*$ se note $\frac{a}{b}$. On pose $K = (A \times A^*)/\sim$ et on définit une somme et une multiplication dans K par

$$\frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_1 b_2 + a_2 b_1}{b_1 b_2}, \quad \frac{a_1}{b_1} \cdot \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_1 a_2}{b_1 b_2} .$$

On admet que ces opérations sont bien définies. Montrer que K est un corps.

Exercice 1. Soit H le sous-groupe de $\mathbb{Z}^3$ engendré par $\{(2,-6,4); (-3,0,-3); (4,6,2)\}$. Déterminer une base $\{u_1, u_2, u_3\}$ de $\mathbb{Z}^3$ et des nombres $d_1, d_2 \in \mathbb{N}^*$ tels que d_1 divise d_2 et $\{d_1 u_1, d_2 u_2\}$ est une base de H. En déduire la décomposition en facteurs invariants de $\mathbb{Z}^3/H$.

Exercice 2.

(1) Montrer que l'ensemble $A = \{P \in \mathbb{R}[X] \mid P'(0) = 0\}$ est un sous-anneau de $\mathbb{R}[X]$.

(2) Montrer que l'on a un homomorphisme surjectif $\varphi : \mathbb{R}[Y_1, Y_2] \to A$ qui envoie Y_1 sur X^2 et Y_2 sur X^3.

(3) Montrer que X^2 et X^3 sont irréductibles dans l'anneau A.

(4) Montrer que ni X^2 ni X^3 n'est premier dans l'anneau A. Que peut-on en déduire sur l'anneau A ?