Université de Bourgogne
Licence 3 Mathématiques

Mardi 20 juin 2023
9h-11h

Examen d'Algèbre 2 Session 2 -

Exercice 1 :

1. Soient H et Q deux groupes. Donner une définition d'une structure de produit semi-direct $H \rtimes_{\varphi} Q$.
2. Soit G un groupe fini qui agit sur un ensemble X.
   (a) Soit x un élément de X. Rappeler les définitions du stabilisateur G_x et de l'orbite $\mathcal{O}(x)$.
   (b) Montrer que l'indice $[G : G_x]$ du stabilisateur G_x est égal au nombre d'éléments de l'orbite $\mathcal{O}(x)$.
   (c) Soient x et y deux éléments de X tels que $\mathcal{O}(x) = \mathcal{O}(y)$, Montrer que les stabilisateurs G_x et G_y sont conjugués.
3. Donner les énoncés des théorèmes de Sylow pour un groupe fini G d'ordre mp^r avec p premier, $m \wedge p = 1$ et $r \in \mathbb{N}^*$

Exercice 2 : Soient G_1 et G_2 deux groupes finis d'ordres respectifs m et n premiers entre eux. Les éléments neutres sont notés e_1 et e_2. Pour chaque morphisme $f = (f_1, f_2) : G_1 \times G_2 \longrightarrow G_1 \times G_2$ tel que $(x, y) \longmapsto f(x, y) = \big(f_1(x, y), f_2(x, y)\big)$ on associe les deux applications $\tilde{f}_1 : G_1 \longrightarrow G_1$ et $\tilde{f}_2 : G_2 \longrightarrow G_2$ définies pour tout $(x, y) \in G_1 \times G_2$ par $\tilde{f}_1(x) = f_1(x, e_2)$ et $\tilde{f}_2(y) = f_2(e_1, y)$.

1. Soit $f = (f_1, f_2)$ un morphisme de $G_1 \times G_2$. Montrer que pour tout $y \in G_2$, on a $f_1(e_1, y) = e_1$.
2. Montrer que l'application $\begin{array}{rccc} F\colon & \mathrm{Aut}(G_1 \times G_2) & \longrightarrow & \mathrm{Aut}(G_1) \times \mathrm{Aut}(G_2) \\ & f = (f_1, f_2) & \longmapsto & \tilde{f} = (\tilde{f}_1, \tilde{f}_2) \end{array}$ est bien définie.
3. Montrer que l'application F réalise un isomorphisme de groupes.
4. Démontrer que le groupe $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ des automorphismes du groupe additif $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est isomorphe au groupe multiplicatif $U(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) = \{[k] \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \quad \text{tel que } k \wedge n = 1\}$.
5. Donner un exemple de deux groupes finis H et K tels que les groupes $\mathrm{Aut}(H \times K)$ et $\mathrm{Aut}(H) \times \mathrm{Aut}(K)$ ne sont pas isomorphes.

Exercice 3 :

Dans tout l'exercice on considère un nombre premier p et on suppose que les nombres $q = p + 2$ et $r = pq + 2$ sont également premiers.

1. Donner au moins deux exemples de nombres p qui vérifient l'hypothèse.

Dans toute la suite on considère un groupe G d'ordre $n = pqr$.

1. Démontrer qu'il existe un unique sous-groupe R de G d'ordre r.
2. Démontrer que si $p > 3$ alors il existe un unique sous-groupe P de G d'ordre p et un unique sous-groupe Q de G d'ordre q.
3. En évoquant des propriétés de produit semi-direct démontrer que si $p > 3$ alors le groupe G est cyclique.
4. On suppose dans cette question que $p = 3$.
   (a) Montrer que nécessairement il existe un unique sous-groupe P d'ordre p de G **ou (inclusif)** un unique sous-groupe Q d'ordre q de G.
   (b) En étudiant toutes les possibilités de la question (4.a) précédente montrer que le groupe G est cyclique et préciser son ordre.

Exercice 4 : Rappelons que l'abélianisé d'un groupe G noté $\mathrm{Ab}(G)$ est le groupe quotient G/G' du groupe G par son sous-groupe dérivé G'. Notons également $G'' = (G')'$ le groupe dérivé de G'.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et D_n le groupe diédral d'ordre $2n$. Déterminer D'_n et D''_n ainsi que $\mathrm{Ab}(D_n)$ et $\mathrm{Ab}(D'_n)$.
2. Si G_1 et G_2 sont deux groupes quelconques, montrer que $\mathrm{Ab}(G_1 \times G_2)$ est isomorphe $\mathrm{Ab}(G_1) \times \mathrm{Ab}(G_2)$.
3. Soit G un groupe et H un sous-groupe de G. On dit que H est un sous-groupe caractéristique si H est stable par tout automorphisme de G : $\forall \varphi \in \mathrm{Aut}(G), \quad \varphi(H) \subset H$.
   (a) Montrer que si H est un sous-groupe caractéristique alors H est normal dans G.
   (b) Montrer que les sous-groupes dérivés G', G'' et le centre $Z(G)$ sont des sous-groupes caractéristiques de G..
   (c) Montrer que la suite $1 \longrightarrow G'/G'' \longrightarrow G/G'' \longrightarrow G/G' \longrightarrow 1$ est une suite exacte.
   (d) Soit Q_8 le groupe des quaternions.
      (i) Quels sont les sous-groupes caractéristiques de Q_8 ?
      (ii) La suite exacte considérée ci-dessus est-elle scindée dans ce cas ?