Université de Bourgogne
Licence 3 Mathématiques

Mardi 16 mai 2023
9h-12h

Examen d'Algèbre 2 Session 1 -

Exercice 1 (Questions de cours) :

1. Soit G un groupe.
   (a) Qu'est ce qu'un commutateur de G ? Donner la définition du sous-groupe dérivée $D(G)$ du groupe G.
   (b) Montrer que $D(G)$ est un sous-groupe normal de G.
   (c) Soit H un sous-groupe normal de G tel que le groupe quotient G/H est abélien. Montrer que $D(G) \subset H$.
   (d) Application : Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et D_n le groupe diédral engendré par une rotation r d'ordre n et une réflexion s. Donner le sous groupe dérivé $D(D_n)$? Justifiez votre réponse.
2. Soit G un groupe fini agissant sur un ensemble fini X. Pour tout élément $g \in G$ on note par $X^g \subset X$ le fixateur de g. (Rappelons que $X^g = \{x \in X, g.x = x\}$)
   (a) Montrer que si deux éléments g et g' de G sont conjugués, alors leurs fixateurs X^g et $X^{g'}$ sont en bijection.
   (b) Donner sans démonstration la formule de Burnside exprimant le nombre d'orbites d'une action.
   (c) Soit p un nombre premier. On suppose que G est un groupe d'ordre p^k, avec $k \in \mathbb{N}^*$. Montrer que le centre de G n'est pas réduit à l'élément neutre.

Exercice 2 (Les questions 1, 2, 3, 4 et 5 sont indépendantes) :

1. Soit G un groupe tel que tout élément différent de l'élément neutre est d'ordre 2. Montrer que G est un groupe abélien. Si de plus G est fini, son ordre est une puissance de 2.
2. Soit G un groupe et H un sous-groupe de G d'indice 2. Montrer que H est un sous-groupe normal de G.
3. Soit G un groupe.
   (a) Montrer que pour tout $g \in G$ l'application $\varphi_g : h \longmapsto ghg^{-1}$ est un automorphisme de G. Ces automorphismes sont appelés automorphismes intérieurs de G.
   (b) Montrer que l'ensemble des automorphismes intérieurs de G noté $\mathrm{Int}(G)$ est un groupe, et qu'il est isomorphe au quotient de G par son centre $Z(G)$.
4. Soit G un groupe et a et b deux éléments distincts de G tel que l'ensemble $\{gag^{-1},\ g \in G\}$ des conjugués de a dans G est égal à $\{a, b\}$. Soit $H = \langle a, b\rangle$ le sous-groupe engendré par a et b.
   (a) En considérant $b^{-1}ab$ montrer que $ab = ba$ et que H est un sous-groupe normal de G.
   (b) Montrer que H est un sous-groupe propre de G. (On pourra raisonner par l'absurde : supposer que $H = G$ et analyser les conjugués de a.)
5. Soient m et n deux entiers naturels premiers entre eux, G un groupe d'ordre $m \times n$ et H un sous-groupe <u>normal</u> de G d'ordre n. (Ainsi l'ordre et l'indice de H dans G sont premiers entre eux).
   (a) Rappeler sans démonstration le deuxième théorème d'isomorphisme.
   (b) Soit K un sous-groupe quelconque de G d'ordre n.
      i. Montrer que HK/H est un sous-groupe de G/H.
      ii. Montrer que nécessairement HK/H est d'ordre 1 et que $K \subset H$.
      iii. En déduire que $K = H$ et que G possède un seul sous-groupe d'ordre n.

Exercice 3 (Groupes d'ordre pq et p^2q.) :

1. (Question préliminaire)
   Soient G un groupe fini et H et K deux sous-groupes de G tels que H est normal dans G et $H \cap K = \{1_G.\}$
   (a) Montrer que pour tout $(h, k) \in H \times K$ il existe $h' \in H$ tel $hk = kh'$ et que HK est un sous-groupe de G.
   (b) Montrer que HK est isomorphe à un produit semi-direct $H \times_\varphi K$. On précisera le morphisme φ.
   (c) Montrer que si de plus K est normal dans G alors HK est isomorphe au produit direct $H \times K$.
2. (Classification des groupes d'ordre pq)
   Soient p et q deux nombres premiers avec $p < q$ et G un groupe d'ordre pq.
   (a) Démontrer que G admet un unique sous groupe H d'ordre q et que celui-ci est normal dans G.

-Tourner la page-

(b) Démontrer que G admet au moins un sous-groupe d'ordre p.
Notons K un de ces sous-groupes.

(c) Montrer que G est isomorphe à un produit semi-direct $H \rtimes_{\varphi} K$.

(d) On suppose que p ne divise pas $q-1$, montrer de le sous-groupe K est normal dans G et que G est isomorphe au groupe additif $\mathbb{Z}/pq\mathbb{Z}$.

3. (Classification partielle des groupes d'ordre $\overset{2}{p}q^{\cancel{2}}$)
Soient p et q deux nombres premiers avec $p \neq q$ et G un groupe d'ordre p^2q. On note n_p (respectivement n_q) le nombre de $p-$Sylow (respectivement $q-$Sylow) de G.

(a) On suppose que p^2-1 n'est pas divisible par q et que $q-1$ n'est pas divisible par p.

i. Montrer que $n_p = n_q = 1$ et que G est abélien. Préciser ce groupe G à isomorphisme près.

ii. Montrer que tous les groupes d'ordre 2023 sont abéliens.

(b) On suppose que $n_q = p^2$.

i. Montrer que nécessairement q divise p^2-1 et que G possède exactement $p^2(q-1)$ éléments d'ordre q.

ii. En déduire que $n_p = 1$ et que G est isomorphe à un produit semi-direct qu'on précisera.(On pourra le résultat vu en TD que tout groupe d'ordre p^2 est abélien et est isomorphe à $\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}$ ou à $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$).

Exercice 4 (Entiers de Gauss) : On note $\mathbb{Z}[i]$ l'ensemble des nombres complexes de la forme $a+ib$ avec $a, b \in \mathbb{Z}$. Pour tout élément $z = a+ib$ on pose $N(z) = a^2+b^2$.

1. Montrer que $Z[i]$ est un sous anneau de $\mathbb{C}$.
2. Montrer que pour tout $z, z' \in Z[i]$, on a $N(zz') = N(z)N(z')$.
3. Montrer qu'un élément z est inversible dans $\mathbb{Z}[i]$ si et seulement si $N(z) = 1$ et donner la liste des éléments inversibles de $\mathbb{Z}[i]$.
4. Monter que $1+i$et $1-i$ sont irréductibles dans $\mathbb{Z}[i]$ et que 2 ne l'est pas.