UNIVERSITÉ DE BOURGOGNE
U.F.R. Sciences et Techniques

ANNÉE 2022-2023
6 janvier 2023

L3-Algèbre linéaire et bilinéaire
Examen
Durée : 3 heures

L'usage de tout appareil électronique est interdit. Les documents ne sont pas non plus autorisés. La rédaction et la clarté des arguments seront prises en compte dans la notation.

Notation : $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

(1) (5 points) (Questions de cours)

(a) Trouver toutes les classes de similitude des matrices de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ ayant X^4 comme polynôme caractéristique. (Vous pouvez utiliser les invariants de similitude, et exhiber un représentant de chaque classe.)

(b) Soit M une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Donner la définition de la classe de congruence de M. Soit N une matrice congruente à M. Montrer que $rg(M) = rg(N)$. Peut-on aussi conclure que les polynômes caracteristiques de M et N sont égaux ? Justifier votre réponse.

(c) Donner les définitions d'une forme sesquilinéaire, et d'une forme hermitienne d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel E.

(2) (7 points)

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$.

(a) Calculer le polynôme caractéristique de A.

(b) Donner une base de chaque sous-espace propre de A.

(c) Calculer le polynôme minimal de A.

(d) Déterminer la réduction de Frobenius de A.

(e) Déterminer la réduction de Jordan J_A de A, après avoir justifié que celle-ci existe.

(f) Trouver une matrice $P \in GL_4(\mathbb{R})$ telle que $P^{-1}AP = J_A$.

(g) En déduire la décomposition de Dunford de A.

(3) (5 points) Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, et soit ϕ une forme bilinéaire symétrique non-dégénérée sur E. Soit $F \subset E$ un sous-espace vectoriel, et soit $F^\perp$ le ϕ-orthogonal de F.

(a) Montrer que $\dim(F) + \dim(F^\perp) = \dim(E)$. (*Indication* : Vous pouvez démontrer ce résultat par récurrence sur la dimension de F.)

(b) Montrer que $F \cap F^\perp$ est contenu dans le cône d'isotropie de ϕ.

(c) Donner un exemple où $F \oplus F^\perp \neq E$.

(d) Est-il vrai que $(F^\perp)^\perp = F$? Justifier votre réponse.

(4) (3 points) Réduire chaque forme quadratique ci-dessous en somme de carrés de formes linéairement indépendantes, puis en déduire le rang, la signature et le noyau dans chaque cas :

(a) $q_1 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},\ (x, y, z) \mapsto x^2 + 3y^2 - z^2 + 4xy + 2yz$;

(b) $q_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},\ (x, y, z) \mapsto xy + yz - 2xz$.

(5) (2 points) Déterminer une base orthogonale qui est aussi orthonormale pour le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^3$ pour la forme quadratique ci-dessous :

$$q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},\ (x, y, z) \mapsto -2x^2 + 2y^2 + z^2 + 4xz.$$