UNIVERSITÉ DE BOURGOGNE
U.F.R. Sciences et Techniques

ANNÉE 2022-2023
22 juin 2023

**L3-Algèbre linéaire et bilinéaire**
**Examen : Session 2**
**Durée : 3 heures**

---

L'usage de tout appareil électronique est interdit. Les documents ne sont pas non plus autorisés. La rédaction et la clarté des arguments seront prises en compte dans la notation.

---

Notation : $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

$\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est l'espace vectoriel des matrices $n \times n$, avec coefficients dans $\mathbb{K}$.

Sa base canonique est $\{e_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$, où $e_{ij}$ est la matrice ayant 1 dans le coefficent de la $i$ème ligne et $j$ème colonne, et 0 dans tous les autres coefficients.

**(1) (6 points)** (Questions de cours)

(a) Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n$.
  (i) Donner la définition d'un endomorphisme cyclique de $E$.
  (ii) Soit $f$ un endomorphisme qui est diagonalisable. Donner une condition nécessaire et suffisante sur les valeurs propres pour que $f$ soit cyclique. Justifier rapidement votre réponse.

(b) On suppose maintenant que $E$ est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel
  (i) Donner la définition d'une forme hermitienne sur $E$ et la définition de sa forme polaire.
  (ii) Si $E = \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, et si $q(A) = |tr(A)|$ pour chaque $A \in E$, montrer que $q$ est une forme hermitenne, et trouver sa matrice par rapport à la base standard de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.

**(2) (3 points)**

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$.

(a) Calculer le polynôme minimal de $A$.

(b) Déterminer la réduction de Frobenius de $A$.

(c) Soient $M$ et $M' \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ deux matrices ayant le même polynôme caractéristique $\chi \in \mathbb{R}[X]$ et le même polynôme minimal $\mu \in \mathbb{R}[X]$. On suppose aussi que $\chi$ n'est pas de la forme $(X-\lambda)^4$. Montrer que $B$ et $B'$ sont semblables.

**(3) (5 points)**

Soit la matrice $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 5 & 4 \\ -1 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -3 & -2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$.

(a) Calculer le polynôme caractéristique de $B$.

(b) Donner une base de chaque sous-espace propre de $B$.

(c) Déterminer la réduction de Jordan $J$ de $B$, après avoir justifié que celle-ci existe.

(d) Trouver une matrice $P \in GL_4(\mathbb{R})$ telle que $P^{-1}BP = J$.

(e) En déduire la décomposition de Dunford de $A$.

**(4) (5 points)** Soient $E = \mathbb{R}^n$ et $q : E \to \mathbb{R}$ une forme quadratique sur $E$. Soit $\varphi : E \times E \to \mathbb{R}$ sa forme polaire. Le cône d'éléments isotropes est noté $\mathcal{C}$. Autrement dit, $\mathcal{C} = \{x \in E | q(x) = 0\}$. Soit $H =$ le noyau de $q$. Soit $(r, s)$ la signature de $q$.

(a) Montrer que le $\mathcal{C} \subset H$, avec égalité si et seulement si $r = 0$ ou $s = 0$.

(b) Pour cette partie de l'exercice, supposer que $q$ est **non dégénérée**.

(i) Soit $F \subset \mathcal{C}$ un **sous-espace vectoriel** de $E$ contenu dans $\mathcal{C}$. Montrer que la restriction $\varphi|_{F\times F}$ de $\varphi$ sur $F \times F$ est 0.

(ii) Montrer que $\dim(F) \leq n/2$.

(iii) Soit $d = \min\{r, s\}$. Montrer qu'il existe un sous-espace vectoriel contenu dans $\mathcal{C}$ de dimension $d$.

**(5) (2 points)** Soit $V$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension 4, et soit $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ une base de $V$. Soit $\{e_1^*, \ldots, e_4^*\}$ la base duale de l'espace vectoriel $V^*$ dual à $V$.

(a) Soit $W \subset V$ le sous-espace vectoriel engendré par $\{e_1 + e_2, e_2 + e_3, e_4\}$. Déterminer une base de $W^\perp \subset V^*$.

(b) Soit $\ell_1 = e_1^*$, $\ell_2 = e_1^* + e_2^*$, $\ell_3 = e_2^* + e_3^*$, et $\ell_4 = e_4^*$. Montrer que $\{\ell_1, \ldots, \ell_4\}$ est une base de $V^*$, et trouver la base $\mathcal{B}'$ de $V$ telle que sa base duale est $\{\ell_1, \ldots, \ell_4\}$.