SESSION DE RATTRAPAGE – ANALYSE FONCTIONNELLE

Durée 2h00. Tout document interdit. Toute affirmation non-triviale doit être justifiée.

Pour tout $p > 0$, on note $\ell^p = \{x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} : \sum_{n\in\mathbb{N}} |x_n|^p < \infty\}$.

Exercice 1.

(1) Montrer que $\|x\|_1 = \sum_{n\in\mathbb{N}} |x_n| < \infty$ définit une norme sur ℓ^1.
(2) Montrer que $(\ell^1, \|\cdot\|_1)$ est un espace de Banach.

Exercice 2. On considère le cas $p > 1$.

(1) Montrer que $\|x\|_p = \left(\sum_{n\in\mathbb{N}} |x_n|^p\right)^{1/p}$ définit une norme sur ℓ^p.
(2) Montrer que $(\ell^p, \|\cdot\|_p)$ est un espace de Banach.

Exercice 3. On considère le cas $p \in]0,1[$.

(1) Montrer que $(a+b)^p \leq a^p + b^p$ pour tout $a, b \geq 0$.
(2) Montrer que $d_p(x,y) = \sum_{n\in\mathbb{N}} |x_n - y_n|^p$ définit une distance sur ℓ^p.
(3) Montrer que (ℓ^p, d_p) est un espace métrique complet.
(4) On note $B_p = \{x \in \ell^p : d_p(0,x) \leq 1\}$. Pour tout $i \in \mathbb{N}$, on pose $e^{(i)} = (\delta_{i,n})_{n\in\mathbb{N}}$, et pour $n \in \mathbb{N}$ fixé, on pose
$$x^{(n)} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} e^{(i)}.$$
Calculer $d_p(0, x^{(n)})$ et en déduire que B_p n'est pas convexe.

Exercice 4. Soit $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}, dx)$, et $\mathcal{P} = \{f \in L^2(\mathbb{R}, dx) : f(x) = f(-x) \text{ presque partout}\}$.

(1) Montrer que $\mathcal{P}$ est un sous-espace fermé de $\mathcal{H}$.
(2) Pour tout $f \in \mathcal{H}$, montrer qu'il existe une unique fonction $g \in \mathcal{P}$ telle que
$$\|f - g\|_2 = \min_{h\in\mathcal{P}} \|f - h\|_2,$$
que l'on explicitera.

Exercice 5. Déterminer la série de Fourier S de la fonction $g : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ définie par
$$g(x) = \begin{cases} x^4 & \text{si } |x| < \pi, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$