CONTRÔLE TERMINAL – ANALYSE FONCTIONNELLE

Durée 3h00. Tout document interdit. Toute affirmation non-triviale doit être justifiée.

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé ($\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$). On rappelle qu'une *semi-norme* sur E est une fonction $\rho : E \to \mathbb{R}_+$ telle que pour tout $x, y \in E$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, on a

$$\rho(x+y) \leq \rho(x) + \rho(y) \quad \text{et} \quad \rho(\lambda x) = |\lambda| \rho(x).$$

On dit qu'une famille de semi-normes $(\rho_\alpha)_{\alpha \in I}$ sur E *sépare les points* si pour tout $x \in E \setminus \{0\}$, il existe $\alpha \in I$ tel que $\rho_\alpha(x) \neq 0$.

Exercice 1. On suppose que E admet une famille dénombrable de semi-normes $(\rho_n)_{n \in \mathbb{N}}$ qui sépare les points.

(1) Montrer que

$$d(x, y) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{2^n} \frac{\rho_n(x-y)}{1 + \rho_n(x-y)}$$

définit une distance sur E.

(2) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $\rho_n : (E, d) \to \mathbb{R}$ est continue.

Exercice 2. On pose $E := \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$ on note $\| \cdot \|_k : E \to \mathbb{R}$ la fonction qui a $x = (x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ associe $\|x\|_k = |x_k|$.

(1) Montrer que $(\| \cdot \|_k)_{k \in \mathbb{N}}$ définit une famille de semi-normes sur E qui sépare les points.

(2) Soit d la distance associée à la famille $(\| \cdot \|_k)_{k \in \mathbb{N}}$. Montrer qu'une suite $(x^{(k)})_{k \in \mathbb{N}} \subset E$ converge vers $x \in E$ par rapport à la distance d, si et seulement si $\lim_{k \to \infty} x_n^{(k)} = x_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(3) Montrer que (E, d) est complet.

Exercice 3. L'espace des *fonctions à décroissance rapide* est défini par

$$\mathscr{S}(\mathbb{R}) := \left\{ f \in C^\infty(\mathbb{R}; \mathbb{K}) : \sup_{x \in \mathbb{R}} |x^p f^{(k)}(x)| < \infty \text{ pour tout } p, k \in \mathbb{N} \right\}.$$

(1) Montrer que $\mathscr{S}(\mathbb{R})$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

(2) Montrer que les fonctions $\|f\|_{p,k} = \sup_{x \in \mathbb{R}} |x^p f^{(k)}(x)|$ définissent une famille de semi-normes $\| \cdot \|_{p,k}$ sur $\mathscr{S}(\mathbb{R})$ qui sépare les point.

(3) Soit d la distance associée à la famille $(\| \cdot \|_{p,k})$. Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathscr{S}(\mathbb{R})$ une suite de Cauchy dans $(\mathscr{S}(\mathbb{R}), d)$. Montrer que pour tout $p, k \in \mathbb{N}$, il existe une fonction $g_{p,k} \in C^0(\mathbb{R}; \mathbb{K})$ telle que $\lim_{n \to \infty} x^p f^{(k)}(x) = g_{p,k}(x)$ uniformément sur $\mathbb{R}$.

(4) Montrer que pour tout $p, k \in \mathbb{N}$, la fonction $g_{p,k}$ est de classe C^∞ et que

$$g'_{p,k} = p g_{p-1,k} + g_{p,k+1}.$$

(5) En déduire qu'il existe une fonction $g \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$ telle que $g_{p,k}(x) = x^p g^{(k)}(x)$ pour tout $p, k \in \mathbb{N}$.

(6) En déduire que $\lim_{n \to \infty} f_n = g$ dans $(\mathscr{S}(\mathbb{R}), d)$.

Exercice 4. Pour tout $f \in L^1(\mathbb{R}, dx)$, on note

$$\mathcal{F}[f](t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ixt}dx$$

sa transformée de Fourier.

(1) Montrer que si $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$, alors

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|dx \leq \pi(\|f\|_{0,0} + \|f\|_{2,0}).$$

(2) En déduire que $\mathscr{S}(\mathbb{R}) \subset L^1(\mathbb{R}, dx)$ et que l'inclusion définit une application continue

$$\iota : (\mathscr{S}(\mathbb{R}), d) \to L^1(\mathbb{R}, dx).$$

(3) Montrer que $\mathcal{F}[f] \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$ pour tout $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$, et que la restriction de $\mathcal{F}$ à $\mathscr{S}(\mathbb{R})$ définit une application continue

$$\Phi : (\mathscr{S}(\mathbb{R}), d) \to (\mathscr{S}(\mathbb{R}), d).$$

Exercice 5. On considère la fonction $f(x) = (x - \pi)^2$ définie sur $[0, 2\pi]$.

(1) Calculer les coefficients de Fourier

$$\hat{f}(n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{2\pi} f(x)e^{-inx}dx.$$

(2) Utiliser les théorèmes de convergence pour les séries de Fourier pour en déduire les valeurs des sommes

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

Exercice 6 (Question de cours). Soit $(\mathcal{H}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace de Hilbert et $C \subset \mathcal{H}$ un sous-ensemble fermé, convexe et non vide. Montrer que C contient un unique vecteur de norme minimale.

Exercice 7. Pour $\alpha \leq \beta$ fixés, on pose

$$C_{\alpha,\beta} = \{x = (x_n) \in \ell^2(\mathbb{N}) : \alpha \leq x_n \leq \beta \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}\}.$$

(1) Montrer que $C_{\alpha,\beta} \neq \varnothing$ si et seulement si $\alpha \leq 0 \leq \beta$.

(2) Montrer que $C_{\alpha,\beta}$ est convexe et fermé dans l'espace de Hilbert $\ell^2(\mathbb{N})$.

(3) On suppose $\alpha \leq 0 \leq \beta$. Pour tout $x = (x_n) \in \ell^2(\mathbb{N})$, déterminer le point $x_{\alpha,\beta} \in C_{\alpha,\beta}$ tel que $d(x, C_{\alpha,\beta}) = \|x - x_{\alpha,\beta}\|$.