2022/23

Analyse Numérique (LM64)

Examen final (5 janvier 2023)

Temps : 3h00

1. (Décomposition QR) **[4 points]**

   i) Énoncer le théorème de décomposition QR d'une matrice. **[1 point]**

   ii) Étant donnée une matrice A inversible, montrer que sa décomposition QR est unique. **[1.5 points]**

   iii) Étant donnée la matrice A

$$A = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & -1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{2} & 2 & 0 \\ -\sqrt{2} & 1 & \sqrt{3} \end{pmatrix} ,$$

   écrire sa décomposition QR. **[1.5 points]**

2. (Méthodes itératives) **[6 points]**

   Soient A et $P \in M_n(\mathbb{R})$ matrices inversibles et $b \in \mathbb{R}$. Dans le contexte du problème $Ax = b$, soit la suite définie par

$$\begin{cases} x^{(0)} = x_0 \\ x^{(k+1)} = Bx^{(k)} + c \end{cases}$$

   avec $B = I_n - P^{-1}A$ et $c = P^{-1}b$. On considère la matrice, avec $a \in \mathbb{R}$ ($a > 0$) arbitraire

$$A = \begin{pmatrix} -a & -1 \\ -1 & -a \end{pmatrix} .$$

   i) Déterminer les valeurs de a pour lesquelles chacune des méthodes suivantes converge : Richardson **[2 points]**, Jacobi **[0.5 point]** et Gauss-Seidel **[0.5 point]**.

   ii) Soit $||\cdot||$ la norme matricielle induite associée à une norme $||\cdot||$ sur $\mathbb{R}^n$. Si l'erreur au pas k est défini par $e^{(k)} = x^{(k)} - x$, montrer que si $||B|| < 1$ et k satisfait

$$k \geq \frac{\ln\left(\frac{1-||B||}{||x^{(1)}-x^{(0)}||}\right) - N\ln(10)}{\ln(||B||)} ,$$

   alors $||e^{(k)}|| < 10^{-N}$. **[1 point]**

   iii) Si on considère la norme $||\cdot||_2$, expliciter cette condition sur k (en termes de $x^{(1)}$, $x^{(0)}$ et N), pour :

   a) Les matrices B_R et B_J correspondantes aux méthodes de Richardson et Jacobi, respectivement, pour les cas convergents déterminés dans i). **[1 point]**

   b) La matrice B_{G-S} correspondante à la méthode de Gauss-Seidel, pour les valeurs de a appropriées. **[1 point]**

2. (Stabilité de valeurs propres) **[6 points]**

   i) Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$ diagonalisable et $A(\epsilon) = A + \epsilon C$, avec $C \in M_n(\mathbb{C})$ et $\epsilon > 0$. Énoncer et démontrer le résultat de stabilité des valeurs propres de A sous la perturbation ϵC en termes de la norme $||\cdot||_\infty$ de C. **[3 points]**

ii) Étant donnée une matrice $O \in M_n(\mathbb{R})$ orthogonale, c'est à dire, $OO^t = \mathbb{I}_n$, et la matrice diagonale $C \in M_n(\mathbb{C})$ donnée par

$$C = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \alpha_2 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_n \end{pmatrix}$$

avec $\alpha_i \in \mathbb{C}, \forall i \in \{1, \dots, n\}$, et $\alpha_i \neq 0$ au moins pour un $i \in \{1, \dots, n\}$, donner une condition suffisante sur $\epsilon > 0$, en fonction des valeurs $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ et $n \in \mathbb{N}$, pour garantir que la matrice

$$O(\epsilon) = O + \epsilon C \ ,$$

soit inversible. **[3 points]**

4. (Systèmes non-linéaires) **[4 points]**
   i) Énoncer le théorème de Newton-Raphson dans $\mathbb{R}^n$. **[2 points]**
   ii) Étant donnés $a, b \in \mathbb{R}$ fixes et les inconnues x et y, écrire une méthode de Newton-Raphson pour le système **[1 point]** :

$$\begin{cases} \cosh(x)\cos(y) = a \\ \sinh(x)\sin(y) = b \end{cases}$$

   iii) Discuter la convergence de l'algorithme en fonction des valeurs $a, b \in \mathbb{R}$. **[1 point]**