L3 Analyse Numérique (2022/23)
Session 2 (22 juin 2023, 9h00)

Temps : 3h00

1. (Décomposition LU et de Choleski) **[4 points]**
   On considère la matrice suivante

$$A = \begin{pmatrix} a & a & a & a \\ a & b & b & b \\ a & b & c & c \\ a & b & c & d \end{pmatrix} ,$$

   où a, b, c et d sont des nombres réels.
   i) **[2 points]** Donner la décomposition LU de A et les conditions sur a, b, c et d pour que cette décomposition LU soit unique.
   ii) **[1 point]** Donner les conditions nécessaires et sufissantes sur a, b, c et d pour que A admette une décomposition de Choleski.
   iii) **[1 point]** Écrire la décomposition de Choleski de la matrice A, quand elle satisfait les conditions dans ii).

2. (Normes matricielles induites et rayon spectral) **[7 points]**

   Étant donnée $A \in M_n(\mathbb{R})$ et une norme $||\cdot||$ sur $\mathbb{R}^n$ (comme espaces linéaires sur $\mathbb{C}$) :
   i) Définir la norme matricielle induite $||\cdot||$ sur $M_n(\mathbb{R})$ (sur le corps $\mathbb{C}$). **[1 point]**
   ii) Définir le rayon spectral $\rho(A)$ de A. **[1 point]**
   iii) Pour la norme du point i), montrer (noter que cette norme est prise sur $\mathbb{C}$)

$$\rho(A) \leq ||A|| \, .$$

   [1 point]
   iv) Donner un example de norme $||\cdot||$ sur $M_n(\mathbb{R})$ et de matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$ telles que $\rho(A) > ||A||$. Est-elle cette norme une norme matricielle ? Justifier. **[1 point]**
   v) Si A est symétrique, prouver (à partir de la définition de la norme $||\cdot||_2$)

$$\rho(A) = ||A||_2 \, ,$$

   où $||\cdot||_2$ est la norme matricielle induite en $M_n(\mathbb{R})$ à partir de la norme euclidienne en $\mathbb{R}^n$ (c'est à dire $||\boldsymbol{x}||_2 = (x_1^2 + \ldots + x_n^2)^{\frac{1}{2}}, \forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$). **[3 points]**

3. (Stabilité de valeurs propres) **[6 points]**
   i) Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$ diagonalisable et $A(\epsilon) = A + \epsilon C$, avec $C \in M_n(\mathbb{C})$ et $\epsilon > 0$. Énoncer et démontrer le résultat de stabilité des valeurs propres de A sous la perturbation ϵC en termes de la norme $||\cdot||_\infty$ de C. **[4 points]**
   ii) Étant donnée une matrice $O \in M_n(\mathbb{R})$ orthogonale, c'est à dire, $OO^t = \mathbb{I}_n$, et la matrice diagonale $C \in M_n(\mathbb{C})$ donnée par

$$C = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \alpha_2 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_n \end{pmatrix}$$

   avec $\alpha_i \in \mathbb{C}, \forall i \in \{1, \ldots, n\}$, et $\alpha_i \neq 0$ au moins pour un $i \in \{1, \ldots, n\}$, donner une condition suffisante sur $\epsilon > 0$, en fonction des valeurs $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ et $n \in \mathbb{N}$, pour garantir que la matrice

$$O(\epsilon) = O + \epsilon C \, ,$$

   soit inversible. **[2 points]**

4. (Systèmes non-linéaires) **[3 points]**
   i) Énoncer le théorème de Newton-Raphson dans $\mathbb{R}^n$. **[1 point]**
   ii) Étant donnés $a, b, c \in \mathbb{R}$ fixes, écrire une méthode de Newton-Raphson pour le système **[1 point]** :

$$\begin{cases} r \sin\theta \cos\varphi = a \\ r \sin\theta \sin\varphi = b \\ r \cos\theta = c \end{cases}$$

   iii) Discuter la convergence de l'algorithme en fonction des valeurs $a, b, c \in \mathbb{R}$. **[1 point]**