Université de Bourgogne
Département de Mathématiques - L3 Janvier 2023

CALCUL DIFFÉRENTIEL - EXAMEN (2h)

I

Montrer que l'application $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par

$$f(x,y) = \left(x^3 + y, \mathrm{e}^y - x\right)$$

est un difféomorphisme de classe $\mathcal{C}^1$.

II

On se donne $a, b, c \in \mathbb{R}_+^*$, et on considère l'ellipsoïde $\mathcal{E} = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1\right\}$.

1. En quels points $\mathcal{E}$ est-il une sous-variété de dimension 2 de $\mathbb{R}^3$?
2. Calculer l'équation du plan tangent à $\mathcal{E}$ en un point $(x_0, y_0, z_0) \in \mathcal{E}$.
3. Déterminer les points $(x_0, y_0, z_0) \in \mathcal{E}$ avec $x_0 > 0$, $y_0 > 0$ et $z_0 > 0$ en lesquels le plan tangent à $\mathcal{E}$ intersecte les axes de coordonnées en des points $A \in Ox$, $B \in Oy$ et $C \in Oz$ tels que $OA = OB = OC$ (ici, MN représente la longueur segment MN).

III

On considère le système de deux équations à trois inconnues

$$\begin{aligned} x^2 + xy - z^2 &= -1 \\ 2x^3 - y^2 + z^2 &= -3\,. \end{aligned}$$

On désigne par $V \subseteq \mathbb{R}^3$ l'ensemble des solutions de ce système.

1. Vérifier que le point $A = (0,2,1)$ est une solution.
2. Montrer qu'il existe deux fonctions φ et ψ de classe $\mathcal{C}^1$ définies sur un voisinage U de 1 telles que $\varphi(1) = 0$, $\psi(1) = 2$, et, pour tout $z \in U$, $(\varphi(z), \psi(z), z)$ est solution du système.
3. Calculer $\varphi'(1)$ et $\psi'(1)$.
4. Déterminer l'espace tangent à V au point A.