Université de Bourgogne
Département de Mathématiques
UFR Sciences et Techniques

L3 Mathématiques
UE-Intégration.

Examen - 4 janvier 2023
durée : 2h

Notations. La mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$ est notée λ. La mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^2$ est notée λ_2. Pour alléger les notations on notera parfois $\mathrm{d}x$ à la place de $\mathrm{d}\lambda(x)$, et $\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ à la place de $\mathrm{d}\lambda_2(x,y)$.

Vous rédigerez vos exercices sur deux copies séparées :

exercices 1 et 2 sur une copie, exercices 3 et 4 sur une autre.

Exercice 1. Soit $(X, \mathscr{M}, \mu)$ un espace mesuré.

1. Soit $h : X \to \mathbb{R}$ une fonction mesurable positive telle que $\displaystyle\int_X h\,\mathrm{d}\mu = 0$.
   (a) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $U_n = \{x \in X : h(x) > \frac{1}{n}\}$. Montrer que $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite croissante de limite $U = \{x \in X : h(x) > 0\}$.
   (b) En déduire que h est μ-presque partout nulle $\left(\text{on pourra utiliser l'intégrale } \displaystyle\int_{U_n} h\,\mathrm{d}\mu\right)$.
2. Soit $f : X \to \mathbb{R}$ une fonction mesurable positive. On note $\nu = f\mu$ la mesure de densité f par rapport à μ, dont on rappelle la définition :
$$\forall A \in \mathscr{M} \quad \nu(A) = \int_A f\,\mathrm{d}\mu$$
   (a) Montrer que ν est bien une mesure sur $(X, \mathscr{M})$ et qu'elle satisfait la propriété :
$$\forall A \in \mathscr{M} \quad (\mu(A) = 0) \implies (\nu(A) = 0).$$
   (b) On suppose f strictement positive sur X. En utilisant la question 1, montrer l'implication réciproque :
$$\forall A \in \mathscr{M} \qquad (\nu(A) = 0) \implies (\mu(A) = 0).$$

***

Exercice 2.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, et tout $x \in \mathbb{R}$, on pose : $g_n(x) = \sqrt{\dfrac{n}{n+x}}\,\mathbb{1}_{[0,n]}(x)$. Montrer que $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante et donner sa limite.
2. Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ une fonction borélienne <u>positive</u>. Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} n\int_{[0,1]} \frac{f(nt)}{\sqrt{1+t}}\,\mathrm{d}\lambda(t)$, en justifiant votre réponse par un résultat du cours. (*Indication : on pourra utiliser le changement de variable $x = nt$*).
3. Montrer que ce résultat est encore valable si f n'est plus nécessairement positive mais est intégrable par rapport à λ sur $\mathbb{R}_+$ en justifiant votre réponse par un résultat du cours.

Changez de copie !

Exercice 3. Soit $\alpha \in]0;1[$. Pour $t \in \mathbb{R}_+$, on pose : $\displaystyle f_\alpha(t) = \int_{[0;+\infty[} \mathrm{e}^{-t/x^\alpha}\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x.$

1. Montrer que f_α est définie et continue sur $[0;+\infty[$. Calculer $f_\alpha(0)$.
2. Montrer que f_α est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0;+\infty[$. Donner sa dérivée sous forme d'une intégrale et préciser les variations de f_α.
3. Calculer la limite de f_α en $+\infty$. (*Indication : on pourra considérer une suite $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui tend vers $+\infty$*).
4. Représenter sommairement la fonction f_α (*on admet que la dérivée seconde de f_α existe et est positive sur* $]0;+\infty[$).

***

Exercice 4. En calculant $\displaystyle\int_{]0;1[^2} x^y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ de deux façons, donner la valeur de $\displaystyle\int_{]0,1[} \frac{t-1}{\ln t}\,\mathrm{d}t$.