

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES ORDINAIRES

ÉVALUATION TERMINALE SECONDE SESSION

Durée : 1H50

Documents autorisés : reproduction papier des
diapositives de cours et notes manuscrites
personnelles

Liminaires

Inventez un numéro d'anonymat constitué de trois lettres et trois chiffres tous différents que vous reporterez sur votre copie d'examen et sa feuille annexe ainsi que les éventuelles feuilles intercalaires.

Si vous utilisez des feuilles intercalaires, numérotez 1R le recto de la première et 1V son verso, 2R le recto de la deuxième et 2V son verso, etc... Reportez, dans la case prévue à cet effet sur la copie double, le nombre d'intercalaires utilisées incluant la feuille annexe.

Si vous êtes amené à utiliser à plusieurs reprises des méthodes numériques propres à un domaine particulier, il vous est demandé de mentionner l'étendue de vos connaissances en variant les méthodes employées.

1 Questions de cours

1.1 Questionnaire simple

Donnez une réponse courte (un mot, une phrase ...) aux questions suivantes.

1.1.1 À quel type de problèmes appartient l'équation $A\vec{x} = \vec{b}$ où A est une matrice?

1.1.2 Citez une méthode de résolution d'un système d'équations non linéaires.

1.1.3 Quel est l'intérêt de la méthode de décomposition LU sur la méthode de GAUSS?

1.1.4 Citez une méthode de résolution d'un système d'équations linéaires.

1.1.5 Quelle est la condition d'existence d'une racine de la fonction $f(x)$ dans l'intervalle $[x_G, x_D]$?

1.1.6 Est-il pertinent de vérifier l'égalité d'un nombre réel à zéro?

1.1.7 Pourquoi doit-on parfois intégrer numériquement une fonction?

1.1.8 Dans quel domaine scientifique est utilisé le modèle SIR?

1.1.9 Peut-on utiliser la fonction exponentielle dans le cadre d'une approximation linéaire?

1.1.10 Quelles sont les plus petit et plus grand nombres entiers signés codables sur un octet?

1.1.11 Quelle astuce algorithmique permet de réutiliser les calculs antérieurs lors des itérations de la méthode des trapèzes?

1.1.12 À quelle méthode numérique ne relevant pas de l'intégration fait appel la méthode de ROMBERG?

1.1.13 Existe-t-il des méthodes analytiques de recherche des racines de polynômes à une inconnue de degré 7?

1.1.14 Qu'est ce que la matrice jacobienne?

1.2 Règle et crayon

Reportez, sur la feuille annexe, la représentation graphique du calcul, par la méthode des trapèzes, de l'intégrale de la fonction $f(x)$ entre les bornes x_G et x_D , avec une précision du carreau.

Quelle est la valeur, en carreaux, de cette intégrale?

2 Programmation : Synchronie

2.1 Présentation

En 1665, Christian HUYGENS observa que deux horloges à pendule fixées sur un même mur se synchronisaient à terme, bien que leurs périodes ne puissent être rigoureusement identiques.

Ce phénomène est nommé « synchronie des horloges ».

Il fait l'objet de nombreuses vidéos mettant par exemple en œuvre des métronomes posés sur un plateau mobile.

Dans un article¹ publié en 1975, Yoshiki KURAMOTO présente un modèle simple de synchronisation d'oscillateurs non linéaires couplés reproduisant ce phénomène.

On se propose ici d'étudier une version simplifiée de ce modèle.

Soit un système de n oscillateurs x_i , $i \in \{0, n-1\}$ tels que $x_i = X_i^A \sin(\theta_i)$ où X_i^A est l'amplitude de l'oscillateur et θ_i son angle.

θ_i varie au cours du temps selon la loi : $\dot{\theta}_i = \omega_i - \sum_{j=0}^{n-1} k_{ij} \sin(\theta_j - \theta_i)$

où ω_i est la pulsation propre de l'oscillateur et k_{ij} caractérise le couplage entre l'oscillateur i et l'oscillateur j . Les conditions initiales s'écrivent $\theta_i(0) = \varphi_i$.

Dans ce modèle, X_i^A , ω_i et φ_i sont constants.

Pour la suite de cet énoncé :

— $n = 2$, sauf indication contraire ;

— les paramètres constants (X_i^A , ω_i , φ_i , k_{ij}) seront définis par des directives de compilation #define en début de programme.

Sauf indication contraire, dans les exercices qui suivent, les valeurs de ces paramètres seront :

— $X_0^A = 1, 0$, $X_1^A = 1, 2$;

— $\omega_0 = 3, 0$, $\omega_1 = 3, 1$;

— $\varphi_0 = 0$, $\varphi_1 = 0, 5$;

— $k_{ii} = 0$, $k_{ij} = 0, 2$ pour $i \neq j$.

De même, la durée de simulation par défaut sera de 100 secondes pour un pas temporel de 10 millisecondes.

2.2 Étude

2.2.1 Question préliminaire

Quelle est l'influence de la valeur des coefficients k_{ii} sur le comportement du modèle ?

¹ Self-Entrainement of a population of coupled non-linear Oscillators, Lecture Notes in Physics, International Symposium on Mathematical Problems in Theoretical Physics. 39. Springer-Verlag, New York, 1975, p. 420.

2.2.2 Tracé de courbes

Afin de représenter graphiquement les courbes², concevez un programme en langage C qui enregistrera dans le fichier textuel courbes.txt - ou à défaut affiche sur l'écran - les valeurs des oscillateurs à des intervalles de temps réguliers, à raison d'un instant par ligne, en respectant le format :

t $x_0^{t\}$ $x_1^{t\}$

Par simplification, on supposera que, pour cet exercice, chaque oscillateur suit la loi $\theta_i = \omega_i t + \varphi_i$, correspondant à des coefficients k_{ij} tous nuls.

2.2.3 Monosynchronisation

Dans cet exercice, $k_{01} = 0$.

2.2.3.1 Analyse

Explicitiez les équations du modèle et indiquez quelle proposition parmi les suivantes est vraie :

1. les deux oscillateurs sont linéaires et suivent la même loi que dans l'exercice §2.2.2 ;

2. l'un des oscillateurs est linéaire et l'autre est non-linéaire ;

3. les deux oscillateurs sont non-linéaires.

2.2.3.2 Programmation

Modifiez le programme de l'exercice §2.2.2 afin de simuler ce modèle.

2.2.4 Bisynchronisation

Écrivez le programme en langage C permettant de simuler le comportement de deux oscillateurs respectant le modèle simplifié de KURAMOTO.

2.2.5 Multisynchronisation

Exposez quelles modifications vous apporteriez au programme de l'exercice §2.2.4 afin de simuler le comportement d'un nombre élevé (e.g. ≥ 1000) d'oscillateurs ?

Il n'est pas demandé d'écrire le programme C.

² e.g. avec l'outil gnuplot.