

Examen final – Transformées de Fourier, échantillonnage et filtrage discret

• **Exercice 1** – Transformée de Fourier continue

1.1 Tracez $g_a(t)$ et calculez sa TF. Tracez module et phase pour $a = 4$. Interprétez.

$$g_a(t) = \begin{cases} 1/a & \text{si } t \in [-a; -a/2] \\ -1/a & \text{si } t \in [a/2; a] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Rappel :

$$\begin{aligned} \cos p + \cos q &= 2 \cos\left(\frac{p+q}{2}\right) \times \cos\left(\frac{p-q}{2}\right) \\ \cos p - \cos q &= -2 \sin\left(\frac{p+q}{2}\right) \times \sin\left(\frac{p-q}{2}\right) \end{aligned}$$

• **Exercice 2** – Fonction de transfert

Soit le système du 1er ordre passe-haut $H(\omega) = \frac{j\omega}{\omega_c + j\omega}$. Si le signal d'entrée $e(t) = V e^{j\omega t}$, alors le signal de sortie $s(t) = H(\omega)e(t)$.

2.1 Quelle est la réponse du système au signal $e(t) = V \cos(\omega_0 t)$?

2.2 Quelle est la réponse du système au signal carré de fréquence de motif f_0 ?

• **Exercice 3** – Série de Fourier

Soit le signal :

$$s(t) = \cos(2\pi ft) + \cos(8\pi ft)/4 + \cos(18\pi ft)/9 + \cos(24\pi ft)/12 + \cos(60\pi ft)/30 + \cos(90\pi ft)/45.$$

3.1 Quelle est la période ou la fréquence du signal $s(t)$?

3.2 Déterminez les coefficients a_n et b_n ainsi que a_0 .

3.3 Quelle est la synthèse du signal ?

• **Exercice 4** – Transformée de Fourier à Temps Discret

4.1 Soit la fenêtre-filtre $h_1[k] = \{\dots, 0, 1, 1, 1, 0, \dots\}/3$. Calculez et représentez sa TFTD.

4.2 Idem avec $h_2[k] = \{\dots, 1, 0, 1, 0, \dots\}$. Calculez et représentez sa TFTD.

4.3 Comparez h_1 et h_2 .

• **Exercice 5** – Dérivation et lissage

- 5.1 Soit $g[k] = \{1, 0, 1, -10, 10, -1, 0, -1\}/15$. Décomposez g en filtres dérivatifs élémentaires ($\{1, -1\}$) et en un éventuel filtre lisseur. Donnez la nouvelle définition de g . Quel est l'ordre de la dérivée g ?
- 5.2 Soit $h[k] = \{1, 3, 4, 3, 1\}/12$. Déterminez un filtre dérivée seconde f à partir de h .
- 5.3 Soit $Y[k]$ la fonction échelon, calculez (graphiquement ou par équation) $w[h] = f * Y[k]$.

• **Exercice 6** – *Transformée de Fourier Discrète*

6.1 Soit le signal discret $s[k]$ de longueur N et de fréquence d'échantillonnage f_e . Etablissez le dictionnaire des fréquences qui permettra de représenter le contenu fréquentiel de ce signal à l'aide de la TFD.

6.2 Application : $s[k] = \sin(2\pi 30kT_e)$, $N = 8$, $f_e = 100\text{Hz}$. Idem avec $s[k] = \sin(2\pi 13kT_e)$. Illustrez la forme du résultat (spectre) de la TDF (en module).