Géométrie des courbes et des surfaces

Examen de rattrapage

— durée : 3 heures —

L'usage de tout appareil électronique est interdit. Les documents ne sont pas non plus autorisés.

La concision et la clarté des arguments seront prises en compte dans la notation. Sauf mention contraire, toute réponse apportée à une question devra être soigneusement justifiée.

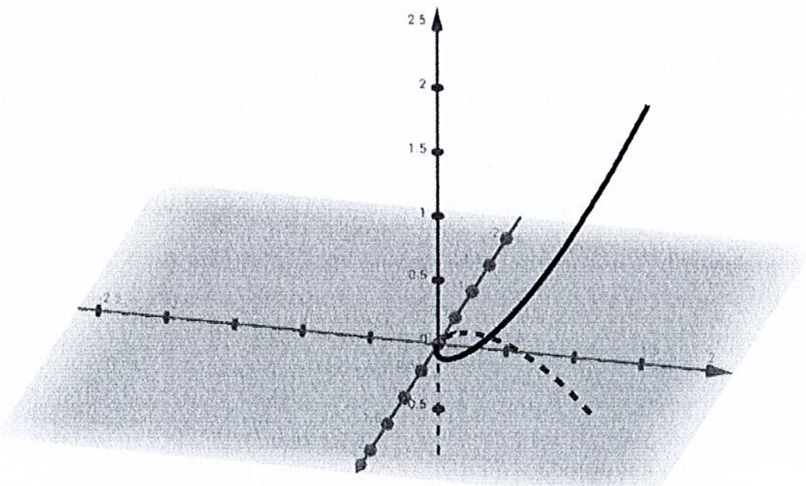
Exercice 1. (1) Rappeler les définitions des notions soulignées ci-dessous, *telles qu'elles ont été introduites dans l'Annexe C du cours* :
- — conique ;
- — conique dégénérée ;
- — isométrie de $\mathbb{R}^2$;
- — relation d'équivalence isométrique entre coniques.

(2) Énoncer le théorème de classification isométrique des coniques non-dégénérées.
(3) Démontrer, dans le détail, ce théorème de classification.

Exercice 2. La *cubique twistée* est la courbe paramétrée $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ définie par

$$\alpha(t) := (t, t^2, t^3).$$

Son support $A = \alpha(\mathbb{R})$ est partiellement représenté ci-dessous :



(1) Justifier brièvement le fait que A est une sous-variété de $\mathbb{R}^3$ de dimension 1.

(2) Montrer que α est birégulière, puis calculer son repère de Frenet.

(3) Rappeler les définitions des plans normal, osculateur et rectificateur à la courbe α au point $\alpha(t)$. Donner ensuite des équations cartésiennes de ces trois plans pour $t := 0$.

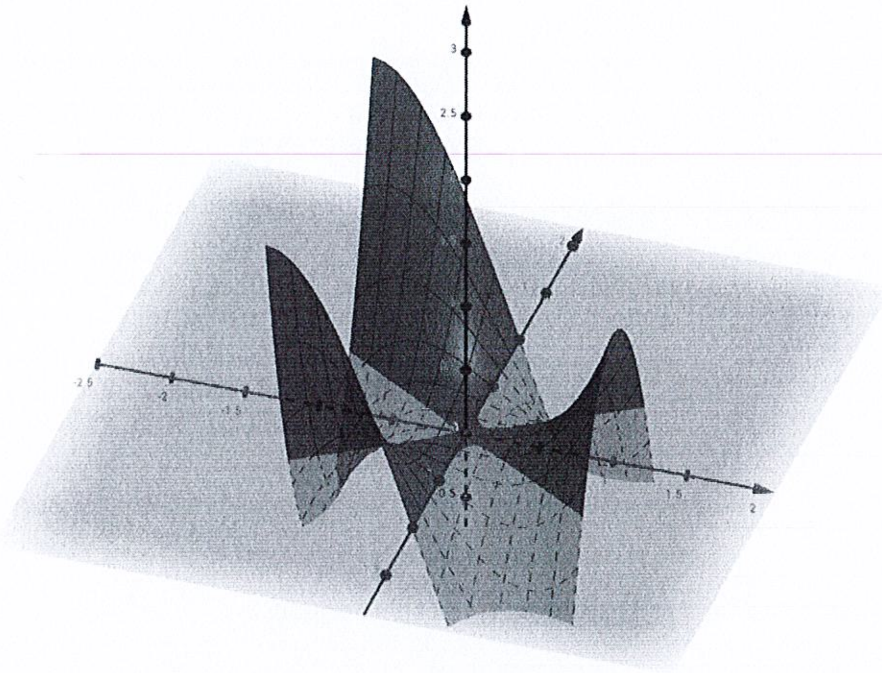
(4) Calculer la courbure κ et la torsion τ de la courbe α.

(5) Déterminer (si elles existent) les limites de κ en $\pm\infty$: quelle interprétation géométrique peut-on donner à cela ?

Exercice 3. La *selle de singe* est le support S de la nappe paramétrée $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ qui est définie par

$$\varphi(u,v) := \big(u, v, u^3 - 3uv^2\big);$$

elle est dessinée ci-dessous dans un voisinage de $\varphi(0,0) = (0,0,0)$:



Pour un point $(r,s) \in \mathbb{R}^2$ fixé, on note $p := \varphi(r,s) \in S$ et

$$f := \frac{\partial \varphi}{\partial u}(r,s), \qquad g := \frac{\partial \varphi}{\partial v}(r,s).$$

(1) Montrer que S est une surface régulière (i.e. une sous-variété de $\mathbb{R}^3$ de dimension 2).

(2) Calculer la matrice de la première forme fondamentale I_p de S dans la base (f,g) de $\overrightarrow{T_pS}$.

(3) Calculer la matrice de la seconde forme fondamentale II_p de S dans la base (f,g) de $\overrightarrow{T_pS}$.

(4) Calculer la courbure de Gauss K_p de S en p.

(5) Montrer que S admet $p = (0,0,0)$ pour unique point planaire et étudier la position relative du plan tangent affine T_pS avec S dans un voisinage de ce point p.

(6) Donner un exemple de courbe paramétrée régulière $\beta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ qui n'est pas plane et qui est contenue dans S. (Justifier la réponse.)