Université de Bourgogne, Mathématiques — Année universitaire 2022–2023

# Géométrie des courbes et des surfaces

## Examen final

— durée : 3 heures —

*L'usage de tout appareil électronique est interdit. Les documents ne sont pas non plus autorisés. La concision et la clarté des arguments seront prises en compte dans la notation. Sauf mention contraire, toute réponse apportée à une question devra être soigneusement justifiée.*

**Exercice 1.** Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle ouvert et soit $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ une courbe paramétrée. On suppose que $\alpha$ est birégulière.

(1) Soit $t \in \mathbb{R}$. Rappeler la *définition* du repère de Frenet $\big(\mathrm{T}(t), \mathrm{N}(t), \mathrm{B}(t)\big)$ de $\alpha$ au point $\alpha(t)$.

(2) Soit $t \in \mathbb{R}$. Rappeler les *définitions* de la courbure $\kappa(t)$ et la torsion $\tau(t)$ de $\alpha$ au point $\alpha(t)$.

(3) Après avoir rappelé leur énoncé, démontrer les trois équations de Frenet (celles qui relient les dérivées $\mathrm{T}', \mathrm{N}', \mathrm{B}'$ à $\mathrm{T}, \mathrm{N}, \mathrm{B}$ et $\kappa, \tau$).

**Exercice 2.** (1) Rappeler les définitions des notions soulignées ci-dessous, *telles qu'elles ont été introduites dans le chapitre 3 du cours* :

— surface régulière ;
— espace tangent vectoriel $\overrightarrow{T_qS}$ en un point $q$ d'une surface régulière $S$ ;
— espace tangent affine $T_qS$ en un point $q$ d'une surface régulière $S$ ;
— application de Gauss d'une surface régulière $S$.

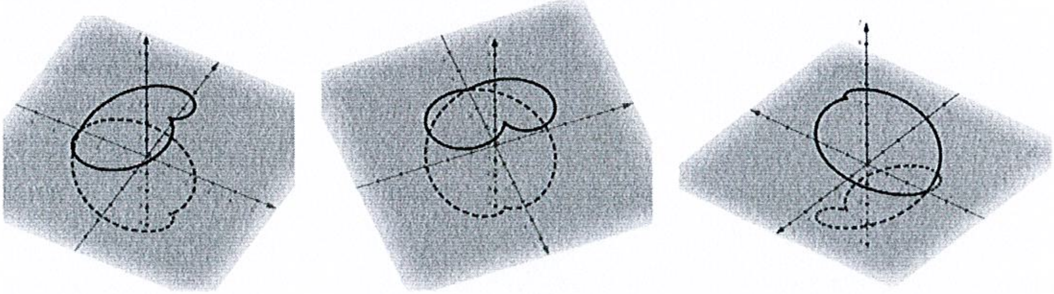
(2) Est-il vrai que toute surface régulière admet une application de Gauss ?

(3) Soit $S \subset \mathbb{R}^3$ la sphère centrée en $(0,0,0)$ et de rayon $R > 0$. Justifier que $S$ est une surface régulière, puis calculer son espace tangent affine $T_qS$ en tout point $q = (a,b,c)$ de $S$ et, enfin, déterminer (s'il en existe) toutes les applications de Gauss de $S$.

**Exercice 3.** Soit la courbe paramétrée $\beta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ définie par

$$\beta(t) = \big(\, 1 + 2\cos(t)\cdot(1-\cos(t))\,,\; 2\sin(t)\cdot(1-\cos(t))\,,\; 2\sqrt{2}\cos(t/2)\,\big).$$

Voici la représentation graphique de cette courbe, vue sous différents angles :



(1) Calculer $\|\beta(t)\|$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Que peut-on en conclure quant au support de $\beta$ ?

(2) Déterminer (s'il en existe) les points singuliers de $\beta$.

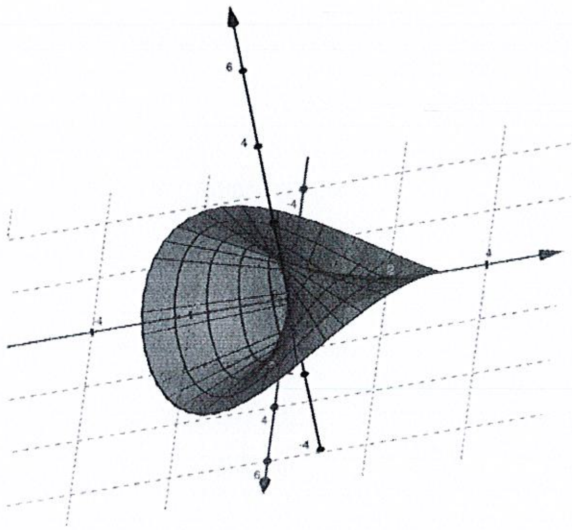
(3) Montrer qu'il existe un intervalle ouvert $I$ contenant $\pi$ sur lequel la courbe $\beta$ est birégulière.

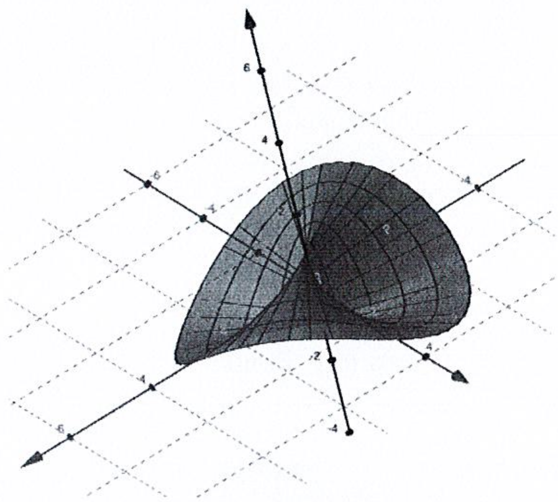
(4) Montrer que la restriction de $\beta$ à $I$ est une hélice, dont on précisera la direction et l'angle.

**Exercice 4** (Conoïde de Plücker).
On considère la nappe paramétrée $\varphi : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ définie par

$$\varphi(u, v) := \big(u\cos(v), u\sin(v), \sin(2v)\big)$$

et dont le support $S := \varphi(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$ est représenté ci-dessous partiellement et sous deux angles différents :





(1) Déterminer (s'il en existe) les points singuliers de la nappe paramétrée $\varphi$.

(2) Montrer que $\varphi$ est une surface réglée, dont on précisera une famille de génératrices.

(3) Montrer que le support $S$ de $\varphi$ est inclus dans le lieu des zéros $F^{-1}(0)$ d'une fonction polynomiale $F$, qu'on précisera. A-t-on l'égalité $S = F^{-1}(0)$ ?

Dans toute la suite de l'exercice, on fixe un point $(r, s) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ qu'on suppose régulier pour $\varphi$, on note $p := \varphi(r, s) \in S$ et $f := \dfrac{\partial \varphi}{\partial u}(r, s)$, $g := \dfrac{\partial \varphi}{\partial v}(r, s)$.

(4) Calculer la matrice de la première forme fondamentale $I_p$ de $S$ dans la base $(f, g)$ de $\overrightarrow{T_pS}$.

(5) Calculer la matrice de la seconde forme fondamentale $II_p$ de $S$ dans la base $(f, g)$ de $\overrightarrow{T_pS}$.

(6) Calculer la courbure de Gauss $K_p$ de $S$ au point $p$, et en déduire la position de $S$ relativement à son plan tangent affine $T_pS$.