Université de Bourgogne
Examen de Graphes (I6S3)

L3 Informatique
Session de Mai 2023

Durée 2h, tous documents autorisés
Sujet recto/verso, le barème est donné à titre indicatif

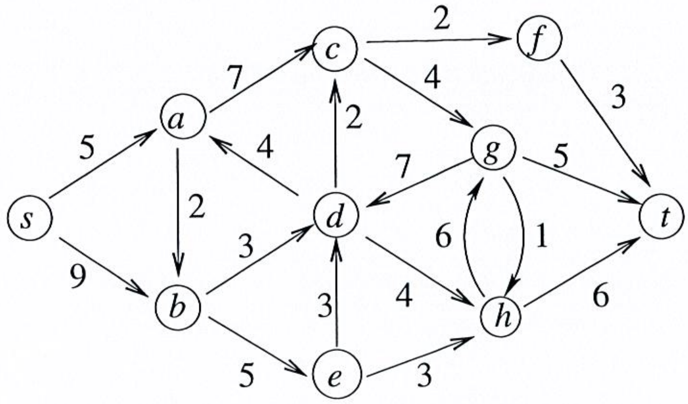
Exercice 1 (5 pts)

Pour chacune des familles de graphes non orientés suivantes, donner un exemple de graphe de cette famille s'il en existe ou sinon justifier pourquoi il n'en existe pas (la famille est vide) :

1. Graphes bipartis de diamètre 3.
2. Graphes planaires avec une taille de clique maximum ω de 6.
3. Graphes connexes de 6 sommets avec une taille de stable maximum α de 4.
4. Graphes planaires réguliers de degré 3.
5. Arbres avec 5 sommets et 5 arêtes.
6. Graphes pour lesquels $\alpha = \omega = 3$.
7. Graphes avec un nombre chromatique égal à l'indice chromatique plus 2 ($\chi = \chi' + 2$).
8. Graphes de classe 1 et de type 1 (c-à-d tel que $\chi' = \Delta$ et $\chi'' = \Delta + 1$).
9. Graphes de classe 2 et de type 2 (c-à-d tel que $\chi' = \Delta + 1$ et $\chi'' = \Delta + 2$).
10. Graphes de genre 1 (dessinable sur un tore sans croisement d'arêtes mais pas sur une sphère).

Exercice 2 (8 pts)

Soit le graphe orienté pondéré ci-dessous.



1. En utilisant l'algorithme de Ford-Fulkerson, trouver le flot maximum entre s et t. La liste des chaînes augmentantes sera présentée en ordre décroissant des valeurs. Justifier la réponse en exhibant une coupe minimum.

2. En ignorant les valeurs sur les arcs, donner l'ordre de parcours des sommets et l'arbre produit par l'algorithme BFS puis DFS (on supposera que les voisins d'un sommet sont pris par ordre alphabétique) exécuté depuis le sommet s (en suivant le sens des arcs).

3. En considérant les valeurs sur les arcs comme des coûts, déterminer un arbre des plus courts chemins depuis le sommet s avec l'algorithme de Dijkstra. L'évolution des distances vers chaque sommet ainsi que le sommet choisi à chaque étape seront indiqués.

4. En oubliant l'orientation des arcs, déterminer, à l'aide de l'algorithme de Prim, un arbre couvrant de poids minimum et indiquer l'ordre d'ajout des arêtes à l'arbre.

Exercice 3 (7 pts)

Deux dentistes ont décidé de mettre des aquariums dans leur salle d'attente commune. Tous les poissons ne peuvent être mis dans le même aquarium car certains ont besoin d'eau froide et d'autres sont plus tropicaux et certains poissons sont agressifs avec d'autres types de poissons.

1. Indiquer comment modéliser le problème en terme de graphe pour répondre à la question suivante : de combien d'aquariums a-t-on besoin au minimum ? En particulier, on spécifiera comment le graphe est constitué ainsi que ce que l'on cherche à calculer/construire sur celui-ci.

2. Il est décidé d'avoir 9 poissons $P_1, P_2, \dots P_9$ et les poissons incompatibles (qui ne peuvent être mis dans le même aquarium) avec P_i, $1 \leq i \leq 9$ sont indiqués ci-dessous :

$P_1 : P_2, P_3, P_5, P_6, P_8, P_9,$	$P_4 : P_5, P_6, P_8, P_9,$	$P_7 : P_2, P_3, P_6, P_9,$
$P_2 : P_1, P_3, P_6, P_7,$	$P_5 : P_1, P_4, P_8, P_9,$	$P_8 : P_1, P_4, P_5, P_9,$
$P_3 : P_1, P_2, P_6, P_7,$	$P_6 : P_1, P_2, P_3, P_4, P_7,$	$P_9 : P_1, P_4, P_5, P_7, P_8$

   Dessiner le graphe correspondant à la question précédente et indiquer une coloration minimale et la raison de son optimalité.

3. Donner, pour chaque paire de sommets non-adjacents du graphe de la question précédente, leur nombre de voisins communs.

4. Donner une séquence de contractions d'arêtes permettant de colorier le graphe de façon optimale.