

Licence 2 - Info4C - Durée 2H

Université de Bourgogne - 2023-2023

Tous les documents sont autorisés

Partie I (8pts)

Exercice 1 (4pts):

A. Trouver la forme close et la fonction génératrice pour les suites :

$$\bullet a_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 0 \\ 1 & \text{si } n = 1 \\ 25 \cdot a_{n-2} & \text{si } n \geq 2. \end{cases}$$
$$\bullet b_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 0 \\ 1 & \text{si } n = 1 \\ 0 & \text{si } n = 2 \\ b_{n-1} + 25 \cdot b_{n-2} - 25 \cdot b_{n-3} & \text{si } n \geq 3. \end{cases}$$

B. Quelle relation existe entre la suite $(a_n)_{n \geq 0}$ et $(b_n)_{n \geq 0}$.

Exercice 2 (2pts): Trouver la forme close et la fonction génératrice pour la suite :

$$c_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0 \\ 3 \cdot c_{n-1} - 1 & \text{si } n \geq 1. \end{cases}$$

Exercice 3 (2pts): Trouver le nombre d'entiers entre 1 et 1 000 000 qui ne sont pas des carrés ni des cubes d'un autre entier.

Partie II (12pts)

Exercice 4 (9pts): Soit \mathcal{P}_n l'ensemble des parties non vides de l'ensemble $[n] = \{1, 2, \dots, n\}$. Si A est une partie non vide de $[n]$, son plus grand élément est noté $\max(A)$, et son plus petit élément est noté $\min(A)$. On définit la relation binaire suivante sur \mathcal{P}_n : si A et B sont deux éléments de \mathcal{P}_n ,

$$A \leq B \iff \begin{cases} A = B \\ \text{ou} \\ \max(A) \leq \min(B) \quad \text{si } A \neq B \end{cases}.$$

1. Que peut-on dire de A lorsque $\max(A) = \min(A)$?

2. Montrer que \leq est une relation d'ordre sur \mathcal{P}_n .
3. Dessiner les diagrammes de Hasse pour $n = 3$.
4. Pour n quelconque, l'ensemble \mathcal{P}_n muni de la relation \leq a-t-il un plus petit ou plus grand élément? Argumentez.
5. Soit $a \leq n$. Quels sont les successeurs et les prédécesseurs de $\{a\}$ dans \mathcal{P}_n (on discutera suivant la valeur de a).
6. Dessiner les relations de couvertures existantes entre les parties $\{1\}$, $\{1, 2\}$, $\{2\}$, $\{2, 3\}$, $\{3\}$, $\{3, 4\}$, \dots , $\{n\}$.
7. Pour $n \geq 1$, est-ce que \mathcal{P}_n est un treillis? Pourquoi?
8. Est-ce un treillis distributif? Pourquoi?

Exercice 5 (3pts): En utilisant un tableau de Karnaugh, donner la forme normale disjonctive de la fonction booléenne d'arité quatre suivante:

$$f(a, b, c, d) = (a \vee \bar{b}) \wedge (\bar{c} \vee d) \wedge (\bar{a} \vee d).$$