

Contrôle Terminal - Mardi 2 mai 2023 (60 min.)

Document recto-verso - 2 exercices à traiter - Calculatrices autorisées

Exercice 1 : Question de cours

1 Approximation de fonctions et de données

On considère N couples de points (x_i, y_i) issus d'une mesure réalisée en TP. On cherche à construire une fonction modèle \tilde{f} représentant une loi empirique qui se cacherait derrière ces données.

- 1.1) 2 grandes familles d'approche ont été présentées en CM : l'interpolation et l'approximation. Rappelerez ici leurs définitions.
- 1.2) Quelles sont les limites de l'interpolation? En citer deux.
- 1.3) Quelle commande MATLAB/Octave vue en TD permet de réaliser l'approximation ou l'interpolation de données par un polynôme?

2 Résolution d'équations non linéaires $f(x) = 0$

- 2.1) On cherche une approximation de $\sqrt{2}$ par la méthode de dichotomie. Pour cela, on résout l'équation $f(x) = x^2 - 2 = 0$ sur l'intervalle $I_0 = [1; 2]$. Après 5 itérations, dans quel intervalle I_5 se trouve la racine?
- 2.2) La méthode Newton vue en CM permet également de résoudre des équations non linéaires du type $f(x) = 0$. Quelle propriété de la fonction f la méthode de Newton utilise-t-elle?
- 2.3) Les deux méthodes citées ci-dessus sont des méthodes itératives, c'est à dire qu'à partir d'une valeur initiale considérée comme une première valeur de solution, on détermine une succession de solutions approximatives qui se rapprochent graduellement de la solution cherchée. Quel est ainsi le test d'arrêt utilisé?

3 Intégration numérique

On souhaite calculer numériquement l'intégrale \tilde{I} d'une fonction f sur un intervalle $[a, b]$. Pour cela, on approxime la fonction f sur cet intervalle par un polynôme de degré 1.

- 3.1) Comment s'appelle cette méthode? Faites le schéma correspondant.
- 3.2) Que vaut alors l'intégrale approchée \tilde{I} en fonction de $a, b, f(a)$ et $f(b)$?
- 3.3) Comment s'appelle la méthode numérique qui consiste à calculer numériquement l'intégrale en approxinant la fonction f par un polynôme de degré 0? Et de degré 2?

4 Systèmes d'équations linéaires

Soit le système d'équations linéaires donné sous forme matricielle $AX = B$, avec A une matrice tridiagonale.

- 4.1) Rappelerez la définition d'une matrice tridiagonale et donner un exemple avec une matrice 4×4 .
- 4.2) Quelle méthode numérique vue en CM et implémentée en TD permet de résoudre un tel système de manière simple et rapide?

5 Résolution des équations différentielles ordinaires

Le principe général de résolution numérique des équations différentielles ordinaires est basé sur la discrétisation de l'intervalle de temps $[\tau, T]$ en N intervalles de longueur h , appelé pas de discrétisation.

- 5.1) Donner l'expression de la coordonnée discrétisée t_i en fonction de τ , h et de l'indice i , pour i allant de 1 jusqu'à $N + 1$.
- 5.2) Donner l'expression de h en fonction de τ , T et N .
- 5.3) En TD, 2 commandes MATLAB/Octave pour discrétiser une coordonnée ont été présentées. En donner la syntaxe appliquée à l'intervalle de temps $[\tau, T]$ en N intervalles de longueur h .
- 5.4) Citer une méthode vue en CM permettant de résoudre numériquement une équation différentielle ordinaire.

Exercice 2 : Programmation

Rappel : le calcul de la dérivée première numérique par différences finies centrées d'une fonction f sur un intervalle $[a, b]$ est donnée par l'expression

$$f'(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_{i-1}))}{2h}$$

avec x_i la variable x discrétisée sur l'intervalle $[a, b]$ et h le pas de discrétisation.

1. Écrire la fonction MATLAB/Octave d'en-tête `function dfdx=DERIV1F(f, a, b, N)` qui effectue le calcul de la dérivée numérique à partir de la formule donnée ci-dessus.

Les entrées de la fonction DERIV1F sont : la fonction f , les valeurs des extrémités de l'intervalle $[a, b]$ et le nombre d'intervalles de discrétisation N . La sortie de la fonction DERIV1F est le tableau `dfdx` qui contient les valeurs de la dérivée de f aux points discrétisés de l'intervalle $[a, b]$ sauf en a et b .

N° d'anonymat (ou à défaut Nom-Prénom) :

Examen de IsPC4a (L2) – Partie POLITANO

2 mai 2023 – durée 1 heure

Document autorisé : Polycopié cours MATLAB/Octave

Questions à 1 point (Total : / 10 pts)

Donnez les commandes Matlab pour :

1) Créer un vecteur a comportant 123 points équidistants dans l'intervalle $[21, 86]$

2) Enregistrer la longueur du vecteur $b=[10\ 15\ 20\ 25\ 30\ 35]$ dans la variable `long`.

3) Afficher la longueur du vecteur b sous la forme « Le vecteur contient ... elements » ou les ... seront remplacés par la valeur enregistrée dans la variable `long`.

4) Créer une matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & -3 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$

5) Extraire la deuxième ligne de M

6) Soit l'instruction $D=\text{eye}(3,3).*M$

Que contient D ?

$$D = \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$$

7) On veut vérifier si le contenu de la variable `nb` est dans l'intervalle $[-5,6[$. Compléter le test:

```
if _____  
    disp('nb est dans l'intervalle');  
end
```

8) Soit les deux instructions : $x=-\pi:0.1:\pi$;
 $y=\cos(x)>0$;

Que contient la variable `y` ?

- 9) Soit deux vecteurs **a** et **b** contenant le même nombre d'éléments. Calculer leur produit scalaire en utilisant une boucle **for**

- 10) Transformez la boucle **for** suivante en une boucle **while**

```
for i=10:2:25
    a=2*i+1
end
```

Écriture et utilisation de fonctions (Total : _____ / 4 pts)

- 11) La formule de conversion des températures exprimées en degré Celsius en degré Fahrenheit est : $^{\circ}C = \frac{5(^{\circ}F-32)}{9}$. Écrire la fonction MATLAB fonction **c=f2c(f)** qui fait la conversion de la température de Fahrenheit à Celsius.

Sous quel nom l'enregistreriez-vous sur le disque dur ? _____

- 12) Écrire un script qui utilise la fonction précédente pour afficher sur 2 colonnes une liste d'équivalence pour des températures comprises entre 0°F et 300°F avec un incrément de 10°F (la première colonne donnera les degrés Fahrenheit, la seconde les degrés Celsius)
