Mathématiques pour l'informatique et l'électronique, MaIE1A

Deuxième session

14 Juin 2023 / 13 h 30 — 15 h 30 (hors tiers temps)

Tout document autre que ceux distribués pendant l'épreuve n'est pas autorisé. Les téléphones portables et autres moyens de communication ne sont pas autorisés. Les instruments électroniques de calcul sont autorisés selon les consignes des surveillants.

Dès le début de l'épreuve, chaque étudiant dispose sur sa table du matériel adéquat pour composer, y compris la carte d'étudiant. Aucun échange entre étudiants ne sera toléré une fois le sujet distribué.

La qualité de la rédaction ainsi que la présentation entrent pour une part significative dans l'évaluation des copies. *Tous les résultats doivent être suffisamment justifiés.*

Sur la copie principale figure une case où l'étudiant renseigne le nombre d'intercalaires utilisés. Si celle-ci n'est pas renseignée, cela signifie qu'il n'y a pas d'intercalaires.

Il ne sera distribué qu'un seul énoncé par étudiant.

1. Restitution de connaissances

1.1. Énoncer le théorème des accroissements finis.

Solution :
Si a et b désignent deux réels, une fonction f est continue sur $[a;b]$ et dérivable sur $]a;b[$, alors if existe c dans $]a;b[$ tel que $f(b)-f(a)=(b-a)f'(c)$.

1.2. Énoncer la formule d'Euler.

Solution :
Pour tout réel θ, on a $\mathrm{e}^{\mathbf{i}\theta}=\cos\theta+\mathbf{i}\sin\theta$

1.3. Énoncer la formule de Moivre.

Solution :
Pour tout réel θ et tout entier relatif n, on a $\cos(n\theta)+\mathbf{i}\sin(n\theta) = (\cos\theta+\mathbf{i}\sin\theta)^n$

2. Nombres complexes

2.1. Mettre $\left(\sqrt{3}-\mathbf{i}\right)^{23}$ sous forme d'exponentielle complexe.

Solution :

Notons $z \overset{\text{def}}{=} \sqrt{3}-\mathbf{i}$. On a $|z| = \sqrt{\sqrt{3}^2 + (-1)^2} = \sqrt{4} = 2$ et $\arg(z) = \dfrac{-\pi}{6}$ d'où

$$\left|z^{23}\right| = |z|^{23} = 2^{23} \tag{1}$$

et

$$\arg\left(z^{23}\right) = 23 \arg z = 23 \times \frac{-\pi}{6} = -4\pi + \frac{\pi}{6} \tag{2}$$

Finalement, on obtient $\left(\sqrt{3}-\mathbf{i}\right)^{23} = 2^{23}\,\mathrm{e}^{\mathbf{i}\,\pi/6} = \mathrm{e}^{23\ln 2 + \mathbf{i}\,\pi/6}$

2.2. Déterminer les racines carrées de $3+4\,\mathbf{i}$.

Solution :

On cherche les réels x et y tels que $(x+\mathbf{i}\,y)^2 = 3+4\,\mathbf{i}$. On a

$$(x+\mathbf{i}\,y)^2 = x^2 + 2\,x\,\mathbf{i}\,y + (\mathbf{i}\,y)^2 = x^2 + 2\,\mathbf{i}\,x\,y + \mathbf{i}^2\,y^2 = x^2 - y^2 + 2\,\mathbf{i}\,x\,y \tag{3}$$

donc

$$(x+\mathbf{i}\,y)^2 = 3+4\,\mathbf{i} \iff \begin{cases} x^2 - y^2 = 3 \\ 2\,x\,y = 4 \end{cases} \tag{4}$$

De plus $\left|x+\mathbf{i}\,y\right|^2 = x^2+y^2 = |3+4\,\mathbf{i}| = \sqrt{3^2+4^2} = \sqrt{25} = 5$. On cherche donc les réels x et y tels que

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 3 \\ x\,y = 2 \\ x^2 + y^2 = 5 \end{cases} \tag{5}$$

On remplace $L1$ par $(L1+L3)/2$ et $L3$ par $(L3-L1)/2$, ce qui donne

$$\begin{cases} x^2 = 4 \\ x\,y = 2 \\ y^2 = 1 \end{cases} \tag{6}$$

Cela ne donne que deux solutions possibles : (2;1) et son opposé. On vérifie :

$$(2+\mathbf{i})^2 = 2^2 + 2\times 2\times \mathbf{i} + \mathbf{i}^2 = 4 + 4\,\mathbf{i} - 1 = 3 + 4\,\mathbf{i} \qquad (7)$$

Donc $2+\mathbf{i}$ et son opposé sont les deux racines carrées de $3+4\,\mathbf{i}$.

2.3. En déduire les solutions de $z^2 - (5-14\,\mathbf{i})z - 2(5\,\mathbf{i}+12) = 0$.

Solution :

On a $\Delta = (5-14\,\mathbf{i})^2 + 4\times 2\times(5\,\mathbf{i}+12) = 5^2 - 2\times 5\times 14\,\mathbf{i} + (14\,\mathbf{i})^2 + 40\,\mathbf{i} + 96 = 25 - 196 + 96 - 140\,\mathbf{i} + 40\,\mathbf{i} = -75 - 100\,\mathbf{i} = -25\times(3+4\,\mathbf{i}) = (5\times\mathbf{i}\times(2+\ \mathbf{i}))^2 = (5\times(2\,\mathbf{i}-1))^2$.
Les deux solutions sont

$$z_- = \frac{5-14\,\mathbf{i}-5\,(2\,\mathbf{i}-1)}{2\times 1} = \frac{10-24\,\mathbf{i}}{2} = 5-12\,\mathbf{i} \qquad (8)$$

$$z_+ = \frac{5-14\,\mathbf{i}+5\times(2\,\mathbf{i}-1)}{2\times 1} = \frac{5-14\,\mathbf{i}+10\,\mathbf{i}-5}{2} = \frac{-4\,\mathbf{i}}{2} = -2\,\mathbf{i} \qquad (9)$$

Vérification : $z_+ + z_- = 5-12\,\mathbf{i} - 2\,\mathbf{i} = 5-14\,\mathbf{i}$ et $z_+\times z_- = (5-12\,\mathbf{i})\times(-2\,\mathbf{i}) = -2\times(5\,\mathbf{i}+12)$.

2.4. On cherche les racines cubiques de $11+2\,\mathbf{i}$ dont la partie réelle et la partie imaginaire sont des entiers.

2.4.1. Restreindre l'ensemble des possibilités en utilisant le module.

Solution :

On cherche deux entiers a et b tels que $(a+\mathbf{i}\,b)^3 = 11+2\,\mathbf{i}$. On a $|a+\mathbf{i}\,b|^3 = |11+2\,\mathbf{i}|$ donc au carré $\left(a^2+b^2\right)^3 = 11^2+2^2 = 125 = 5^3$. Donc a et b vérifient $a^2+b^2 = 5$. Cela donne les possibilités $a=\pm 1$ et $b=\pm 2$ ou $a=\pm 2$ et $b=\pm 1$.

2.4.2. En déduire le résultat.

Solution :

Parmi ces possibilités, on calcule $(2+\mathbf{i})^3 = 2+11\,\mathbf{i}$, $(2-\mathbf{i})^3 = 2-11\,\mathbf{i}$, $(-2-\mathbf{i})^3 = -2-11\,\mathbf{i}$, $(-2+\mathbf{i})^3 = -2+11\,\mathbf{i}$. On multiplie par $\mathbf{i}^3$ ou $-\mathbf{i}$: $(2\,\mathbf{i}-1)^3 = -2\,\mathbf{i}+11$, $(2\,\mathbf{i}+1)^3 = -2\,\mathbf{i}-11$, $(-2\,\mathbf{i}+1)^3 = 2\,\mathbf{i}-11$, $(-2\,\mathbf{i}-1)^3 = 2\,\mathbf{i}+11$. Seule la dernière possibilité convient.

3. Exponentielle et logarithme

3.1. Simplifier $\sqrt[3]{\dfrac{2^{-4}\left(\dfrac{2^2}{2^{-3}}\right)^3\left(2^3\right)^2}{2^8}}$ sans utiliser d'outil numérique.

Solution :
On a

$$\frac{2^{-4}\left(\frac{2^2}{2^{-3}}\right)^3\left(2^3\right)^2}{2^8} = 2^{-4}\left(2^5\right)^3 2^6\, 2^{-8} = 2^{-4}\, 2^{15} 2^6\, 2^{-8} = 2^{-4+15+6-8} = 2^9 \tag{10}$$

La réponse est donc $2^{9/3}$ c'est-à-dire 8.

3.2. Développer l'expression $\left(1 + e^2\right)\left(e^2 - 1\right)\left(e^2 + e^{-2}\right)^2$ sans utiliser d'outil numérique.

Solution :
On a

$$\left(e^2 + e^{-2}\right)^2 = \left(e^2\right)^2 + 2\, e^2\, e^{-2} + \left(e^{-2}\right)^2 = e^{2\times 2} + 2\, e^{2-2} + e^{2\times(-2)} \tag{11}$$
$$= e^4 + 2 + e^{-4} \tag{12}$$

et

$$\left(1 + e^2\right)\left(e^2 - 1\right) = \left(e^2 + 1\right)\left(e^2 - 1\right) = \left(e^4 - 1\right) \tag{13}$$

En multipliant :

$$\left(e^4 - 1\right)\left(e^4 + 2 + e^{-4}\right) = e^4\left(e^4 + 2 + e^{-4}\right) - \left(e^4 + 2 + e^{-4}\right) \tag{14}$$
$$= e^4\, e^4 + 2\, e^4 + e^4\, e^{-4} - e^4 - 2 - e^{-4} \tag{15}$$
$$= e^8 + 2\, e^4 + 1 - e^4 - 2 - e^{-4} \tag{16}$$
$$= e^8 + e^4 - 1 - e^{-4} \tag{17}$$

3.3. Résoudre $\ln(x + 3) + \ln(x + 2) = \ln(x + 11)$

Solution :
On a $\ln(x+3) + \ln(x+2) = \ln(x+11) \iff (x+3)(x+2) = x+11 \iff x^2 + 4x - 5 = 0$.
Les solutions sont -5 et 1.

4. Intégration

4.1. Calculer la dérivée de $x \ln x$. En déduire la valeur de $\displaystyle\int_{x=1}^{2} \ln x \, dx$.

Solution :

On a

$$(x \ln x)' = x' \ln x + x \ln' x = \ln x + x \frac{1}{x} = \ln x + 1$$

et

$$\int_{x=1}^{2} \ln x + 1 \, dx = [x \ln x]_{x=1}^{2} = 2 \ln 2 - 1 \ln 1 = 2 \ln 2$$

d'où

$$\int_{x=1}^{2} \ln x \, dx = 2 \ln 2 - \int_{x=1}^{2} 1, dx = 2 \ln 2 - 1$$

4.2. Calculer $\displaystyle\int_{t=0}^{1} 3^t \, 2^{3t} \, dt$.

Solution :

On a

$$3^t \, 2^{3t} = 3^t \, 8^t = 24^t = e^{t \ln 24}$$

d'ou

$$\int_{t=0}^{1} 3^t \, 2^{3t} \, dt = \int_{t=0}^{1} e^{t \ln 24} \, dt = \left[\frac{e^{t \ln 24}}{\ln 24} \right]_{t=0}^{1} = \frac{e^{\ln 24} - 1}{\ln 24} = \frac{24 - 1}{\ln 24} = \frac{23}{\ln 24}$$

4.3. Montrer que $\cos x \, e^x = \dfrac{e^{(1+i)x} + e^{(1-i)x}}{2}$. En déduire $\displaystyle\int_{x=0}^{\pi} \cos x \, e^x \, dx$.

Solution :

On a

$$\cos x \, e^x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} e^x = \frac{e^{ix} \, e^x + e^{-ix} \, e^x}{2} = \frac{e^{(1+i)x} + e^{(1-i)x}}{2}$$

donc

$$\int_{x=0}^{\pi} \cos x \, e^x \, dx = \int_{x=0}^{\pi} \frac{e^{(1+i)x} + e^{(1-i)x}}{2} \, dx = \frac{1}{2} \int_{x=0}^{\pi} e^{(1+i)x} \, dx + \frac{1}{2} \int_{x=0}^{\pi} e^{(1-i)x} \, dx.$$

Par ailleurs,

$$\int_{x=0}^{\pi} \mathrm{e}^{(1+\mathbf{i})x}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{\mathrm{e}^{(1+\mathbf{i})x}}{1+\mathbf{i}}\right]_{x=0}^{\pi} = \frac{\mathrm{e}^{(1+\mathbf{i})\pi}-1}{1+\mathbf{i}} = \frac{-\mathrm{e}^{\pi}-1}{1+\mathbf{i}} = -\frac{\mathrm{e}^{\pi}+1}{1+\mathbf{i}}$$

et

$$\int_{x=0}^{\pi} \mathrm{e}^{(1-\mathbf{i})x}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{\mathrm{e}^{(1-\mathbf{i})x}}{1-\mathbf{i}}\right]_{x=0}^{\pi} = \frac{\mathrm{e}^{(1-\mathbf{i})\pi}-1}{1-\mathbf{i}} = \frac{-\mathrm{e}^{\pi}-1}{1-\mathbf{i}} = -\frac{\mathrm{e}^{\pi}+1}{1-\mathbf{i}}$$

d'où

$$\int_{x=0}^{\pi} \cos x\,\mathrm{e}^{x}\,\mathrm{d}x = -\frac{\mathrm{e}^{\pi}+1}{2}\left(\frac{1}{1+\mathbf{i}}+\frac{1}{1-\mathbf{i}}\right) = -\frac{\mathrm{e}^{\pi}+1}{2}\times\frac{1-\mathbf{i}+1+\mathbf{i}}{1^2-\mathbf{i}^2} = -\frac{\mathrm{e}^{\pi}+1}{2}$$

5. Équations différentielles ordinaires

Soit l'équation différentielle ordinaire (E) $2y'' + y' - y = 0$.

5.1. r désigne un nombre. Quelle est la signification mathématique de « e^{rx} est une solution de (E) » ?

Solution :

Cela signifie que $(2\,\mathrm{e}^{rx})'' + (\mathrm{e}^{rx})' - \mathrm{e}^{rx} = 0$.

5.2. Quelles sont les solutions de (E) de la forme e^{rx} ?

Solution :

Si e^{rx} est solution de (E) alors

$$2\,(\mathrm{e}^{rx})'' + (\mathrm{e}^{rx})' - \mathrm{e}^{rx} = 2r^2\,\mathrm{e}^{rx} + r\,\mathrm{e}^{rx} - \mathrm{e}^{rx} = (2r^2+r-1)\,\mathrm{e}^{rx} = 0$$

Comme l'exponentielle n'est pas nulle, cela donne $2r^2+r-1=0$. Donc r vaut -1 ou $1/2$. Réciproquement, pour $r=-1$ on a

$$2(\mathrm{e}^{-x})'' + (\mathrm{e}^{-x})' - \mathrm{e}^{-x} = 2\,\mathrm{e}^{x} - \mathrm{e}^{x} - \mathrm{e}^{x} = 0$$

et pour $r = 1/2$ on a

$$2(\mathrm{e}^{x/2})'' + (\mathrm{e}^{x/2})' - \mathrm{e}^{x/2} = 2\,\mathrm{e}^{x/2}/4 + \mathrm{e}^{x/2}/2 - \mathrm{e}^{x/2} = 0$$

Les solutions sont donc e^{-x} et $\mathrm{e}^{x/2}$.

5.3. En déduire toutes les solutions de (E).

Solution :
Les solutions de (E) sont de la forme $y(x) = k_1 \,\mathrm{e}^{-x} + k_2 \,\mathrm{e}^{x/2}$ où k_1 et k_2 sont des constantes.

5.4. En déduire la solution de (E) qui vérifie $y(0) = 5$ et $y'(0) = 1$.

Solution :
On détermine k_1 et k_2 tels que $y(0) = 5$ et $y'(0) = 1$. Cela donne

$$y(0) = 5 = k_1 \,\mathrm{e}^{-0} + k_2 \,\mathrm{e}^{0/2} = k_1 + k_2$$

et comme $y'(x) = -k_1 \,\mathrm{e}^{-x} + k_2 \,\mathrm{e}^{x/2} /2$

$$y'(0) = 1 = -k_1 \,\mathrm{e}^{-0} + k_2 \,\mathrm{e}^{0/2} /2 = -k_1 + k_2/2$$

On obtient le système linéaire

$$\begin{cases} 5 = k_1 + k_2 \\ 1 = -k_1 + k_2/2 \end{cases}$$

dont la solution est $k_1 = 1$ et $k_2 = 4$. La solution cherchée est donc $\mathrm{e}^{-x} + 4 \,\mathrm{e}^{x/2}$.