Contrôle terminal — session 2

Les téléphones, calculatrices, autres outils électroniques ou documents ne sont pas autorisés. Toutes vos réponses doivent être justifiées.

1. (a) Donner la définition d'une suite extraite d'une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

   (b) Énoncer le théorème de Bolzano-Weierstraß.

2. Pour chacune des suites suivantes, décider si la limite existe, et la calculer si elle existe.

   (a) $\left(5 + (-1)^n \cdot \dfrac{1}{n}\right)_{n\geq 1}$

   (b) $\left((-1)^n + 5 \cdot \dfrac{1}{n}\right)_{n\geq 1}$

3. Décidez de la convergence/divergence des séries suivantes ; dans (au moins) un cas, calculez la valeur de la série :

   a) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^2}{(1+n)^4}$, b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3 - 2n^2 + 7}{n^4 + n^3 + n - 2}$

   c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos n}{5^n}$ d) $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} 3^{-n}$

4. Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & -2 \\ 1 & 4 & -4 & -4 \\ 1 & -1 & 4 & \lambda \end{pmatrix}$$

   avec $\lambda \in \mathbb{R}$. Sans utiliser la théorie des déterminants

   (a) Trouver une valeur de λ telle que A est inversible, et calculer l'inverse dans ce cas.

   (b) Trouver une valeur de λ telle que A n'est pas inversible.

5. Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 3 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 2 & 0 & 1 \\ 4 & 3 & 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

   et soit $f\colon \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^4$ définie par $f(v) = Av$.

   (a) Trouver une base de $\operatorname{Im}(f)$.

   (b) Trouver une base de $\operatorname{Ker}(f)$.

   (c) Trouver une matrice B telle que $\operatorname{Im}(f) = \operatorname{Ker}(g)$ où $g(v) = Bv$. (C'est à dire, décrire $\operatorname{Im}(f)$ comme espace des solutions d'un système d'équations.)