Contrôle terminal

Les téléphones, calculatrices, autres outils électroniques ou documents ne sont pas autorisés. Toutes vos réponses doivent être justifiées.

1. Pour chacune des suites suivantes, décider si la limite existe, et la calculer si elle existe.
   (a) $\left(5 + (-1)^n \cdot \frac{1}{n}\right)_{n\geq 1}$
   (b) $\left((-1)^n + 5 \cdot \frac{1}{n}\right)_{n\geq 1}$
2. Décrire trois suites extraites de
$$\left(\frac{n^2 \cos\frac{\pi n}{2} + 3n\sin(n) + 7}{n^2+n+1}\right)_{n\geq 0}$$
   qui convergent vers trois limites distinctes, que vous précisez. Est-ce que la suite de départ converge ?
3. Décidez de la convergence/divergence des séries suivantes ; dans (au moins) un cas, calculez la valeur de la série :
   a) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{(1+n)^2}$, b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3+5n^2+3}{n^5+n^3+n-2}$
   c) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin n}{3^n}$ d) $\sum_{n=3}^{\infty} 5^{-n}$
4. Soit
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & -2 \\ 1 & 4 & -4 & -4 \\ 1 & -1 & 4 & \lambda \end{pmatrix}$$
   avec $\lambda \in \mathbb{R}$. Sans utiliser la théorie des déterminants
   (a) Trouver une valeur de λ telle que A est inversible, et calculer l'inverse dans ce cas.
   (b) Trouver une valeur de λ telle que A n'est pas inversible.
5. Soit
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 3 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 2 & 0 & 1 \\ 4 & 3 & 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$
   et soit $f\colon \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^4$ définie par $f(v) = Av$.
   (a) Trouver une base de $\mathrm{Im}(f)$.
   (b) Trouver une base de $\mathrm{Ker}(f)$.
   (c) Trouver une matrice B telle que $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Ker}(g)$ où $g(v) = Bv$. (C'est à dire, décrire $\mathrm{Im}(f)$ comme espace des solutions d'un système d'équations.)
   (d) Calculer $\mathrm{Im}(f) \cap U$ avec le sous-espace vectoriel U engendré par les vecteurs
$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$