Contrôle Terminal
2 heures

L'usage de tout document est interdit. Le seul dispositif électronique autorisé est la calculatrice **non programmable**.

Exercice 1

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

1. Soit $P(z) = 8z^3 - (20+8i)z^2 + (22+20i)z + (5-12i)$.
   (a) Montrer qu'il existe un réel z_0 tel que $P(iz_0) = 0$.
   (b) Déterminer les nombres complexes a, b et c tels que $P(z) = (z - iz_0)(az^2 + bz + c)$.
   (c) Résoudre l'équation $az^2 + bz + c = 0$.
   (d) En déduire une factorisation du polynôme P.
2. On considère l'application S du plan dans lui même qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe $z' = (-\frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{1}{4}i)z - \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}i$. On considère les points A, B et C d'affixes respectives $z_A = -\frac{1}{2} + (1 - \frac{\sqrt{3}}{2})i$, $z_B = -(\sqrt{3} + \frac{3}{2}) + (2 - \frac{3\sqrt{3}}{2})i$ et $z_C = (1 - \frac{3\sqrt{3}}{2}) + (\frac{5}{2} + \sqrt{3})i$.
   (a) Caractériser géométriquement l'application S.
   (b) Calculer les affixes $z_{A'}$, $z_{B'}$ et $z_{C'}$ des points A', B' et C', images des points A, B et C par l'application S.
   (c) Décrire les liens qui existent entre $z_{A'}$, $z_{B'}$, $z_{C'}$ et les racines du polynôme P.
   (d) Placer les points A', B' et C' dans le plan ; calculer $\frac{z_{B'} - z_{A'}}{z_{C'} - z_{A'}}$ et en déduire la nature du triangle $(A'B'C')$.

Exercice 2

Soit la courbe paramétrée définie par : $M(t) \begin{cases} x(t) = \frac{t^2+1}{2t} \\ y(t) = \frac{2t-1}{t^2}. \end{cases}$

1. Calculer $x'(t)$ et $y'(t)$.
2. Déterminer le point stationnaire $M(t_0)$.
3. Dessiner l'allure de la courbe en $M(t_0)$ en précisant le sens de déplacement. (On pourra poser $h = t - t_0$ et faire un développement limité de $x(t)$ et $y(t)$ en $t = t_0$ à l'ordre 3.)
4. Etudier les branches infinies de la courbe.
5. Etudier les variations des fonctions $x(t)$ et $y(t)$. On fera un tableau des variations.

Exercice 3

1. On pose $I = \displaystyle\int_{\sqrt{\pi/2}}^{\sqrt{\pi}} xe^{-x^2} \sin(x^2)dx$ et $J = \displaystyle\int_{\sqrt{\pi/2}}^{\sqrt{\pi}} xe^{-x^2} \cos(x^2)dx$.
   (a) Montrer que $I = a - J$ où a est un réel à déterminer. (On pourra faire un changement de variable et une intégration par partie).
   (b) Montrer que $J = b + I$, où b est un réel à déterminer.
   (c) En déduire I et J.
2. Calculer l'aire du domaine compris entre les courbes representatives $(\mathcal{C}_f)$ et $(\mathcal{C}_g)$ de $f(x) = -x + 2$ et $g(x) = x^2$. (On pourra faire une représentation graphique et trouver les points d'intersection des deux courbes).

Exercice 4

On considère l'équation différentielle $(E) : y' + \dfrac{1}{x^2 - 1}y = xe^{-\frac{1}{2}\ln(|\frac{x-1}{x+1}|)}$.

1. Déterminer les solutions y_0 de l'équation homogène (E_0) associée à (E).
2. Déterminer une solution particulière y_p de (E) de la forme $y_p(x) = r(x)e^{-\frac{1}{2}\ln(|\frac{x-1}{x+1}|)}$, où $r(x)$ est une fonction à chercher.
3. En déduire la solution y de (E) vérifiant $y(2) = 0$.