

Examen du 14 juin 2023, 13h30-15h30.

Les documents, les calculatrices et tout objet électronique ne sont pas autorisés. Les exercices sont indépendants. Toutes vos réponses doivent être justifiées.

1. On considère la fonction

$$f(x) = \frac{x^3 - 2x^2 - 3x}{(x-3)^2}.$$

- Est-il possible de simplifier la forme de f ?
- Donner le domaine de définition de f .
- Calculer les limites au bord du domaine de définition et en $\pm\infty$.
- Calculer la dérivée de f .
- Trouver tous les points critiques de f .
- Étudier le signe de la dérivée, trouver le sens de variation et les extrema de f .

2. Donner, pour chacune des fonctions suivantes, une primitive sur un intervalle que l'on précisera :

- $\frac{1}{2x-1}$,
- $x \sin(2x)$,
- $\frac{e^x}{1+e^x}$.

3. Calculer les intégrales suivantes :

- $\int_{-1}^1 x^n dx$, $n \neq -1$,
- $\int_0^\pi (\sin x)^2 dx$.

4.

- Calculer les deux premiers termes non nuls du polynôme de Taylor en 0 de la fonction suivante :

$$\cos(2x).$$

- Calculer les deux premiers termes non nuls du polynôme de Taylor en 0 de la fonction suivante :

$$\exp(x^2) \sqrt{1+2x^2}.$$

- Calculer la limite :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\exp(x^2) \sqrt{1+2x^2} - 1}{\cos(2x) - 1}.$$

5. Calculer les limites suivantes :

- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^x - 1) \tan(x)}{\ln(1+x^2)}$,
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^x - 1}{x}$.