

**Examen du 4 janvier 2023, 16h00-18h00.**

Les documents, les calculatrices et tout objet électronique ne sont pas autorisés. Les exercices sont indépendants. Toutes vos réponses doivent être justifiées.

1. On considère la fonction

$$f(x) = \frac{e^{2x}}{1-x^2}.$$

- a. Donner le domaine de définition de  $f$ .
- b. Calculer les limites au bord du domaine de définition et en  $\pm\infty$ .
- c. Calculer la dérivée et trouver tous les points critiques de  $f$ .
- d. Étudier le signe de la dérivée, trouver le sens de variation et les extrema de  $f$ .

2. Donner pour chacune des fonctions suivantes, une primitive sur un intervalle que l'on précisera :

- a.  $x^2 e^{x^3}$ ,
- b.  $x^3 \ln(x)$ .

3. Calculer les intégrales suivantes :

- a.  $\int_1^2 \left(\frac{1}{x} + 2x^5\right) dx$ ,
- b.  $\int_0^{\pi/2} x \cos x dx$ .

4. Calculer les limites en 0 de :

- a.  $\frac{x - \sin x}{x^2}$ ,
- b.  $\frac{x - \sin x}{x^3}$ ,
- c.  $\frac{x - \sin x}{x^4}$ .

5. Calculer les deux premiers termes non nuls du polynôme de Taylor en 0 de la fonction définie par :

$$g(x) = \sin(x)\sqrt{1-x^2}.$$

*Suggestion : quelle est la parité de la fonction  $g$  ?*

6. Calculer la limite suivante en utilisant les développements limités et la notation "petit-o" :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin x - \ln(1+x^2)}{(e^{x^2} - 1)^2}.$$