Epreuve d'algèbre linéaire
Durée : 2h00

Exercice 1. (5 points)
Soit $E = \mathbb{R}^4$, et soit $f : E \to E$ l'application linéaire définie par :

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+2y+w \\ -x-2y+z \\ 2x+4y-2z \\ y+z+w \end{pmatrix}$$

1. Donner une base de $G = Imf$.
2. Donner une base de $F = Kerf$.
3. Quel est le rang de l'application linéaire f ?
4. Etudier l'injectivité de f.

Exercice 2. (3 points)
Soit $E = \mathbb{R}^2$ et $g : E \to E$ l'application linéaire définie par $g(x, y) = (3x + 2y, -x)$.

1. Déterminer les valeurs propres de g.
2. Déterminer les espaces propres de g.
3. Déterminer une base $\mathcal{B}$ de E telle que la matrice de g dans cette base soit diagonale.

Exercice 3. (3 points)
Soit $a \in \mathbb{R}$. En calculant son déterminant, déterminer en fonction de a si la matrice

$$B_a = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & a & a^2 \end{pmatrix}$$

est inversible. Calculer son inverse lorsque $a = 3$.

Exercice 4. (7 points)
On considère l'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ définie par

$$h\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x+y-z \\ -2x+y+2z \\ -x+y+2z \end{pmatrix}.$$

1. Donner sa matrice A dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
2. Soit $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Montrer que $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
3. Calculer les matrices de passage P et P^{-1} entre la base canonique et $\mathscr{B}$.
4. Soit T la matrice de h dans la base $\mathscr{B}$. Calculer la matrice T.

5. Ecrire la matrice T sous la forme $D+N$ où D est une matrice diagonale et N une matrice triangulaire supérieure n'ayant que des 0 sur la diagonale.
6. Soit $n \in \mathbb{N}$. Après avoir remarqué que $DN = ND$ et en appliquant la formule du binôme de Newton à $D+N$ montrer que T^n est égale à
$$T^n = \begin{pmatrix} 1 & n & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix}.$$
7. En déduire A^n.

Exercice 5. (3 points)

Soient α et β deux nombres réels distincts. On note E_α l'ensemble des polynômes de $\mathbb{R}[X]$ ayant α pour racine, E_β l'ensemble des polynômes de $\mathbb{R}[X]$ ayant β pour racine, et E l'ensemble des polynômes de $\mathbb{R}[X]$ ayant α et β pour racines.

1. Montrer que E_α est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$. On admettra sans preuve que c'est aussi le cas pour E_β.
2. L'ensemble E est-il un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$? On justifiera sa réponse.