Université de Bourgogne
L2 MaPC3A 2022/23

# Examen

14 décembre 2022 ; durée : 2 h

**Ex 1. Question de cours.**

Soit $D \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert et $f$ une fonction $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$.

**a)** Donner la définition d'une fonction $f$ differentiable au point $x \in D$.

**b)** Donner la définition du gradient de $f$.

**c)** Soit $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots \mathbf{e}_n$ une base de $\mathbb{R}^n$. Donner la définition d'une dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ au point $x \in D$.

**d)** Montrer que

$$\nabla f = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j} \mathbf{e}_j.$$

**Ex 2.** Calculer le gradient et le laplacien de la fonction $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ suivante

$$f(\mathbf{x}) = \langle \mathbf{a} \wedge (\mathbf{x} \wedge \mathbf{a}), \mathbf{x} \rangle,$$

où $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^3$

**Ex 3.** Déterminer les points critiques de la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ suivante

$$f(x, y) = x^2y^2 - 4xy^2 + 3y^2 - x^2 + 4x,$$

et préciser pour chacun d'eux s'il s'agit d'un maximum local, d'un minimum local ou d'un point selle

**Ex 4.** Calculer l'intégrale

$$\int\int_D (x + y)^2 dxdy,$$

où $D$ est la partie bornée du plan délimitée par les droites d'équation :

$$y = 2; \quad 2y = x; \quad y = -2x.$$

**Ex 5.** Determiner l'aire et la position du centre de masse d'un quart de disque défini par

$$D = \{(x, y) : \quad x \geq 0, \quad y \geq 0, \quad x^2 + y^2 \leq R^2\}.$$