

Examen du 8 juin 2023, 13h30-15h30.

Les documents, les calculatrices et tout objet électronique ne sont pas autorisés. Les exercices sont indépendants. Toutes vos réponses doivent être justifiées.

1. Quel est l'argument principal de $1 - i$? En déduire l'argument principal de $-1 + i$.

2.
 - a. Soit z un nombre complexe de module strictement inférieur à 1, expliquer pourquoi $\lim_{n \rightarrow +\infty} z^n = 0$.
 - b. Soit a un nombre complexe de module 0.5, que vaut $\lim_{n \rightarrow +\infty} (i + 3a^n)$?

3.
 - a. Donner les quatre solutions de l'équation $z^4 = 1$.
 - b. Déterminer un nombre réel dont la puissance quatrième vaut 81. En déduire les quatre racines complexes du polynôme $z^4 - 81$.

4. On rappelle que pour $z \in \mathbb{C}$ on a que $\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$.
 - a. La fonction \cos est-elle bornée sur le demi-plan ouvert $\text{Im}(z) > 0$?
 - b. Résoudre dans \mathbb{C} , l'équation $\cos z = 0$.

5. La fonction $f : z \mapsto \frac{e^z}{2 - z}$ est holomorphe en 0, donc développable en série entière en ce point.
 - a. Sans calcul, donner, en justifiant votre réponse, le rayon de convergence du développement en série entière de la fonction f en 0.
 - b. Calculer les quatre premiers termes de ce développement.

6. La fraction rationnelle $h : z \mapsto \frac{1}{(z^2 + 1)^2}$ admet deux points singuliers i et $-i$.
 - a. Quelle est la nature du point singulier i ?
 - b. Calculer le résidu en i de h . On pourra poser $z = i + t$, t tendant vers 0.
 - c. En déduire par des méthodes d'intégration complexe, la valeur de l'intégrale généralisée :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 + 1)^2}.$$

7. Soit γ un lacet simple parcouru dans le sens positif, contenant 1 dans son intérieur. Que vaut l'intégrale curviligne suivante :

$$\int_{\gamma} \frac{ze^z}{(z-1)^2} dz \quad ?$$