Examen du 5 mai 2023, 14h-16h.

Les documents, les calculatrices et tout objet électronique ne sont pas autorisés. Les exercices sont indépendants. Toutes vos réponses doivent être justifiées.

1.

a. Déterminer la partie réelle et la partie imaginaire de

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + i\right).$$

b. Trouver les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation

$$z^5 - 1 - i = 0.$$

Donner le module et l'argument de chaque solution.

2. Trouver le domaine de convergence de la série entière suivante :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n^k z^n,$$

pour $k \in \mathbb{R}$.

3. Soit g une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$, telle que $g(0) = 3$ et telle que :

$$g(z) = 3e^{-2y}\cos 2x + iv(x, y)$$

pour tout $z \in \mathbb{C}$, $z = x + iy$, x et y réels.

a. Déterminer $v(x, y)$.

b. Etablir une expression de $g(z)$ en fonction de z.

4. On considère la fraction rationnelle :

$$f(z) = \frac{2}{z(z-1)}.$$

a. Quels sont les pôles de f ? Quels sont les ordres des pôles ?

b. Déterminer les nombres a et b tels que :

$$f(z) = \frac{a}{z} + \frac{b}{z-1}.$$

c. Calculer le développement de f en série de Laurent centrée en $z = 0$ sur la couronne $0 < |z| < 1$.

d. Calculer le développement de f en série de Laurent centrée en $z = 0$ sur la couronne $1 < |z| < +\infty$.

e. Calculer les résidus de $f(z)$ en $z = 0$ et en $z = 1$.

f. Soit $\mathcal{C}$ le cercle de centre $z = 0$ et de rayon $\frac{1}{2}$. Ce cercle étant parcouru dans le sens positif, calculer l'intégrale suivante :

$$\int_{\mathcal{C}} f(z)dz.$$

g. Soit $\mathcal{C}'$ le cercle de centre $z = 0$ et de rayon $\frac{3}{2}$. Ce cercle étant parcouru dans le sens positif, calculer l'intégrale suivante :

$$\int_{\mathcal{C}'} f(z)dz.$$

5. On veut calculer l'intégrale généralisée suivante en utilisant les méthodes de l'analyse complexe :

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2 + 1} dx.$$

a. Vérifier que :

$$I = \mathrm{Re}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{x^2 + 1} dx\right).$$

où $\mathrm{Re}(z)$ désigne la partie réelle d'un nombre complexe z.

b. Calculer la valeur de l'intégrale

$$\int_{\mathcal{C}} \frac{e^{iz}}{z^2 + 1} dz$$

le long du lacet $\mathcal{C}$ constitué par le segment $[-R, R]$ et par le demi-cercle $\mathcal{C}_R = \{z \mid |z| = R,\ \mathrm{Im}(z) \geqslant 0\}$ de rayon $R > 0$ suffisamment grand parcouru dans le sens positif.

c. Donner une paramétrisation $z(t)$ du chemin $\mathcal{C}_R$ et écrire la forme explicite de l'intégrale

$$\int_{\mathcal{C}_R} \frac{e^{iz}}{z^2 + 1} dz$$

comme intégrale réelle dans la variable t.

d. Montrer que

$$\int_{\mathcal{C}_R} \frac{e^{iz}}{z^2 + 1} dz$$

tend vers 0 lorsque $R \to +\infty$ en majorant la formule obtenue dans le point précédent.

e. En déduire la valeur de I.