# Analyse (Math1A)

## Examen de rattrapage

— durée : 2 heures —

*L'usage de tout appareil électronique est interdit, et les documents ne sont pas non plus autorisés.*
*La concision et la clarté des arguments seront prises en compte dans la notation.*
*Sauf mention explicite du contraire, toute réponse apportée doit être justifiée !*

*Ce sujet est composé de quatre exercices, qui sont indépendants les uns des autres.*

**Exercice 1** (Questions de cours).

(1) Rappeler la définition de la fonction sinh, puis étudier cette fonction. En déduire que sinh réalise une bijection de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$.

(2) Rappeler la définition de la fonction arsinh, justifier sa dérivabilité, puis calculer sa dérivée.

(3) Pour $a \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$ fixés, rappeler (sans démontration) le développement limité de $(1+x)^a$ au voisinage de $x = 0$ à l'ordre $n$.

(4) Déduire des questions (2) et (3) le développement limité de $\operatorname{arsinh}(y)$ au voisinage de $y = 0$ à l'ordre 5.

**Exercice 2.** Calculer les primitives suivantes en se ramenant à des primitives de fractions rationnelles :

$$\int \frac{1}{\cosh(x)}\mathrm{d}x, \qquad \int \frac{\sqrt{x+1}}{x}\mathrm{d}x.$$

**Exercice 3.** Soit la fonction $f$ définie par $f(x) = \big(\cos(x)\big)^{\frac{1}{x}}$.

(1) Déterminer un voisinage épointé de 0 sur lequel la fonction $f$ est définie.

(2) Justifier le fait que $f$ est prolongeable par continuité en $x = 0$.

(3) Calculer le développement limité de $f$ au voisinage de $x = 0$ à l'ordre 2.

**Exercice 4.** Soit la fonction $g$ définie par $g(x) = \dfrac{1}{1+\sin(x)}$.

(1) Déterminer le domaine de définition de $g$.

(2) Après avoir observé que $g$ est $T$-périodique pour un $T > 0$ (à préciser), dresser le tableau de variations de $g$ sur un intervalle $I$ de longueur $T$. *(Ce tableau devra inclure les limites de $g$ aux bornes de l'intervalle.)*

(3) Calculer le développement limité de $g$ au voisinage de $x = \pi/2$ à l'ordre 3.

(4) Déterminer la tangente au graphe $\Gamma_g$ au point d'abscisse $x = \pi/2$, et préciser la position du graphe par rapport à cette tangente.

(5) Déterminer les primitives de $g$. *(On observera que $(1+\sin(x))(1-\sin(x)) = 1-\sin^2(x)$.)*