Analyse (Math1A)

Examen final

— durée : 2 heures —

L'usage de tout appareil électronique est interdit, et les documents ne sont pas non plus autorisés.
La concision et la clarté des arguments seront prises en compte dans la notation.
Sauf mention explicite du contraire, toute réponse apportée doit être justifiée !

Ce sujet est composé de quatre exercices, qui sont indépendants les uns des autres.

Exercice 1 (Questions de cours).

(1) Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. Rappeler ce que signifie un "voisinage" de x_0.

(2) Soient $x_0 \in \mathbb{R}$ et $d \in \mathbb{N}$. Rappeler ce que signifie la notation de Landau "$o\big((x - x_0)^d\big)$".

(3) Énoncer (sans démonstration) la formule de Taylor–Young.

(4) Appliquer la formule de Taylor–Young à la fonction exponentielle au voisinage de $x_0 = 1$ et à tout ordre $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 2. Soit g la fonction définie par $g(x) := \dfrac{1}{1 - \tan(x)}$.

(1) Déterminer le domaine de définition de g.

(2) Justifier que g est périodique et déterminer sa plus petite période, qu'on notera T.

(3) Montrer que la fonction g peut être prolongée par continuité en certains points : on notera $\tilde{g}$ la fonction ainsi obtenue.

(4) Dresser le tableau de variations de la fonction $\tilde{g}$ sur un intervalle de longueur T.

(5) Calculer une primitive de g et en déduire la valeur de $\displaystyle\int_{-\pi/4}^{0} g(x)\,\mathrm{d}x$.

Exercice 3. Soit g la fonction introduite dans l'Exercice 2.

(1) Déterminer le développement limité de $\tan(x)$ au voisinage de $x = 0$ à l'ordre 3.
(On pourra ici utiliser les développements limités qu'on connait pour $\sin(x)$ *et* $\cos(x)$*.)*

(2) En déduire le développement limité de $g(x)$ au voisinage de $x = 0$ à l'ordre 3.

(3) Déterminer la tangente au graphe Γ_g au point d'abscisse $x = 0$, et préciser la position du graphe par rapport à cette tangente.

Exercice 4. Soit $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $h(v) := \dfrac{1}{(v^2+1)^2}$.

(1) Déterminer une primitive H de la fonction h, et préciser son ensemble de définition.
(On pourra commencer par écrire que $1 = (v^2+1) - v^2$*, puis faire une intégration par parties.)*

(2) Après avoir exprimé $\displaystyle\int \frac{e^{-x}}{\cosh^2(x)}\,\mathrm{d}x$ en fonction de H, effectuer le calcul de cette intégrale en utilisant la question (1).