Université de Bourgogne
UFR Sciences et Techniques

Année 2022-2023
Juin 2023

Logique et Algèbre 1
Examen

Question de cours 1.

(1) Soit $f : E \to F$ une application. Donner les définitions de *image directe* d'une partie de E et de *image réciproque* d'une partie de F.

(2) Donner les définitions de *application injective* et de *application surjective.*

(3) Donner un exemple d'une application injective qui n'est pas surjective (argumenter).

Question de cours 2.

(1) Donner la définition de racine carrée d'un nombre complexe.

(2) Montrer que tout nombre complexe non nul admet deux racines carrées distinctes.

Exercice 1. Démontrer par récurrence sur n que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $10^n - 1$ est un multiple de 9.

Exercice 2. Écrire sous forme algébrique les nombres complexes suivants :

$$2e^{-\frac{2i\pi}{3}}, \ \left(2e^{\frac{i\pi}{4}}\right)\left(e^{-\frac{3i\pi}{4}}\right), \ \left(2e^{-\frac{i\pi}{3}}\right)\left(3e^{\frac{5i\pi}{6}}\right)^{-1}.$$

Exercice 3.

(1) Dans le plan on considère les points A, B, C et D d'affixes 2, 0, $1+i$ et $1-i$, respectivement. Montrer que A, B, C et D sont sur un cercle $\mathcal{C}$. Donner le centre, le rayon et l'équation complexe de $\mathcal{C}$.

(2) Soit M un point du plan d'affixe z. On note $f(M)$ le produit des distances de M aux points A, B, C, D, c'est-à-dire $f(M) = AM \times BM \times CM \times DM$. Montrer que $f(M) = |(z-1)^4-1|$.

(3) Montrer que $f(M) \leq 2$ pour tout $M \in \mathcal{C}$.

(4) Déterminer l'ensemble des points $M \in \mathcal{C}$ vérifiant $f(M) = 2$.