Université de Bourgogne
UFR Sciences et Techniques

Année 2022-2023
Janvier 2023
MATH1B

Logique et Algèbre 1
Examen

Question de cours 1.

(1) Donner la définition de l'argument d'un nombre complexe $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

(2) Expliquer pourquoi on ne peut pas définir l'argument de 0.

(3) Soient $z, z' \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Montrer que $\arg(zz') \equiv \arg(z) + \arg(z') \pmod{2\pi}$.

(4) Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Montrer que $\arg(\bar{z}) \equiv -\arg(z) \pmod{2\pi}$.

Question de cours 2. Soient Ω un point du plan affine d'affixe ω et r un nombre réel strictement positif. Notons $\mathcal{C}$ le cercle de centre Ω et de rayon r. Soit $M \in P$ d'affixe $z \in \mathbb{C}$. Montrer que $M \in \mathcal{C}$ si et seulement si z vérifie l'égalité

$$(E_{\mathbb{C}}) \quad z\bar{z} - \bar{\omega}z - \omega\bar{z} = r^2 - |\omega|^2 .$$

Exercice 1.

(1) Trouver un nombre réel b tel que

$$(Z^2 + bZ + 10)(Z^2 + bZ + 17) = Z^4 - 4Z^3 + 31Z^2 - 54Z + 170 .$$

(2) On considère les équations suivantes :

$$(E)\ Z^4 - 4Z^3 + 31Z^2 - 54Z + 170 = 0 , \quad (E1)\ Z^2 + bZ + 10 = 0 , \quad (E2)\ Z^2 + bZ + 17 = 0 .$$

Soit $z \in \mathbb{C}$. Montrer que z est solution de (E) si et seulement si z est solution de $(E1)$ ou z est solution de $(E2)$.

(3) Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations $(E1)$ et $(E2)$ en posant $b = -2$.

(4) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E).

Exercice 2.

(1) On considère les équations suivantes.

$$(E)\ Z^6 + (2-i)Z^3 - 2i = 0 , \quad (E')\ Z^2 + (2-i)Z - 2i = 0 .$$

Soit $z \in \mathbb{C}$. Montrer que z est solution de (E) si et seulement si z^3 est solution de (E').

(2) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E').

(3) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E). On donnera les solutions sous forme exponentielle.

Exercice 3. Déterminer le lieu géométrique des points M du plan dont l'affixe z vérifie

$$|3z - 2 + 3i| = |z + 2 + 3i| .$$