Université de Bourgogne
Licence 1 Math2A

mercredi 14 juin 2023

Examen

durée : 2h

La calculatrice est interdite

Pour obtenir les points aux questions, vous devez rédiger de façon rigoureuse les démonstrations et justifier précisément toutes vos affirmations.

Exercice 1 (8 pts)
Les définitions demandées doivent être écrites avec une phrase mathématique (c'est-à-dire utilisant uniquement des symboles mathématiques)

1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle.
   (a) Donner la définition de (u_n) *est décroissante.*
   (b) Donner la définition de (u_n) *est minorée*
   (c) Supposons que (u_n) est décroissante et minorée. Démontrer que (u_n) converge.
2. Soit f une fonction réelle définie sur un intervalle ouvert I.
   (a) Donner la définition de f *est croissante sur* I.
   (b) Supposons que f est dérivable sur I et que $f'(x) \geqslant 0 \ \forall x \in I$. Démontrer que f est croissante sur I.
3. Enoncer le théorème de Rolle.

Exercice 2 (4 pts)
Soit $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$

1. Montrer que f est prolongeable par continuité en 0.
2. On note encore f la fonction prolongée. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et donner sa dérivée.
3. f est-elle $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$? le justifier.

Exercice 3 (2 pts) Donner s'ils existent la borne supérieure, inférieure, le plus grand et le plus petit élément des parties de $\mathbb{R}$ suivantes :

1. $A = [-1; \sqrt{2}] \cap \mathbb{Q}$
2. $B = \{1 + \frac{1}{n} \ , \ n \in \mathbb{N}^*\}$

TOURNEZ LA PAGE

Exercice 4 (3 pts)

1. Donner un équivalent en 0 de $f(x) = 1 - \cos(x)$
2. Donner un équivalent en 0 de $g(x) = (1 - e^x)^2$
3. En déduire $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos(x)}{(1 - e^x)^2}$

Exercice 5 (3 pts)

Montrer en utilisant la formule de Taylor Lagrange que :

1. Pour tout $x > 0$, $x - \frac{x^2}{2} < \ln(1 + x)$
2. Pour tout $x > -1$, $\ln(1 + x) \leqslant x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$