Université de Bourgogne
Licence 1 Math2A

mercredi 10 mai 2023

Examen

durée : 2h

La calculatrice est interdite

Pour obtenir les points aux questions, vous devez rédiger de façon rigoureuse les démonstrations et justifier précisément toutes vos affirmations. Les exercices 1 et 2 portent sur des points du cours.

Exercice 1 (6 pts)
Soit I un intervalle ouvert, f une fonction définie sur I et $x_0 \in I$

1. Donner la définition de f *est continue en* x_0 avec la limite puis avec les quantificateurs.
2. Supposons que f est continue en x_0. Soit (x_n) une suite de I convergeant vers x_0. Quelle est la limite de la suite $(f(x_n))$? Démontrez-le avec les quantificateurs.
3. Donner la définition de f *est dérivable en* x_0
4. Démontrer en utilisant cette définition que *si* f *est dérivable en* x_0 *et ne s'annule pas sur* I *alors* $\frac{1}{f}$ *est dérivable en* x_0 *et* $\left(\frac{1}{f}\right)'(x_0) = -\frac{f'(x_0)}{f(x_0)^2}$.

Exercice 2 (3 pts)

1. Enoncer le théorème de Bolzano Weierstrass.
2. Soit f une fonction continue sur $[a, b]$. En raisonnant par l'absurde, démontrer que f est majorée sur $[a, b]$

Exercice 3 (7 pts)

1. Soit $f(x) = \frac{\ln(1+x)}{x}$. Donner l'ensemble de définition $\mathcal{D}$ de f.
2. Justifier rapidement que f est dérivable sur $\mathcal{D}$ et calculer sa dérivée.
3. Montrer que f est prolongeable par continuité en 0 et préciser la valeur du prolongement en 0. On notera toujours f la fonction ainsi prolongée.
4. Rappeler sans justification le développement limité en 0 à l'ordre 2 de $\ln(1+x)$.
5. Montrer que f est dérivable en 0 et donner $f'(0)$.
6. Calculer la limite de $f'(x)$ quand x tend vers 0.
7. En déduire que f est de classe C^1 sur $]-1, +\infty[$.

Exercice 4 (5 pts)

1. Enoncer le théorème des accroissements finis.

2. Soit $x > 0$ un réel. Appliquer le théorème des accroissements finis à la fonction $x \to \ln(x)$ sur le segment $[x, x+1]$.
3. En déduire pour $x > 0$ un encadrement de $\ln(x+1) - \ln(x)$ en fonction de x (c'est-à-dire une double-inégalité de la forme $f(x) \leqslant \ln(x+1) - \ln(x) \leqslant g(x)$).

   Posons pour $n \in \mathbb{N}^*$: $u_n = \dfrac{1}{n+1} + \cdots + \dfrac{1}{2n}$

4. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\ln(2n+1) - \ln(n+1) < u_n < \ln(2n) - \ln(n)$$

5. En déduire que la suite (u_n) converge et donner sa limite.