Université de Bourgogne
U.F.R. Sciences et Techniques
L1-Math 2B : Algèbre linéaire et géométrie

Année 2022-2023
12 juin 2023

**Examen : Session 2**
**Durée : 2 heures**

JUSTIFIER VOS RÉSULTATS ET MONTRER LES CALCULS

(1) **(5 points)** (Questions du cours) Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. Soient $F \subset E$ un sous-espace vectoriel.
  (a) Donner la définition d'un supplémentaire de $F$ dans $E$.
  (b) Montrer l'existence d'un supplémentaire de $F$. Est-il unique ?
  (c) Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice carrée. Décider, sans justification, si les énoncés suivants sont VRAIS ou FAUX.
    (i) La matrice $A$ est inversible si et seulement si $\det(A) \neq 0$.
    (ii) $A$ a au moins une valeur propre dans $\mathbb{R}$.
    (iii) La trace de la matrice identité est 1.
    (iv) Deux matrices semblables ont la même trace.

(2) **(6 points)**
Soit $a \in \mathbb{R}$ et soit

$$M_a = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & a & 1 & 0 \\ a & 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

  (a) Calculer le déterminant de $M_a$.
  (b) Etudier le rang de $M_a$ suivant les valeurs de $a$ et en déduire quand la matrice $M_a$ est inversible.
  (c) Calculer l'inverse de $M_2$, s'il existe.

(3) **(2 points)**
En utilisant la méthode du pivot de Gauss, trouver l'ensemble des solution du système linéaire suivant :

$$\begin{cases} x \quad\quad +z = 1 \\ x \quad -y \quad -z = 0 \\ 2x \quad -y \quad\quad = 1 \\ 3x \quad -2y \quad -z = 1 \end{cases}$$

(4) **(4 points)** Soit $V = \mathbb{R}[X]_{\leq 3}$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients dans $\mathbb{R}$ de degré $\leq 3$, et soit $h : V \to V$ l'application linéaire définie par $h(P) = 2P - XP' + P''$.
  (a) Trouver une base $\mathcal{B}$ de $V$.
  (b) Déterminer la matrice $Mat(h; \mathcal{B})$ de $h$ par rapport à la base $\mathcal{B}$.
  (c) Déterminer le noyau, $\ker(h)$, et l'image, $Im(h)$, de $h$.

(5) **(4 points)** Soit $E$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et $f : E \to E$ une application linéaire.
  (a) Donner la définition d'une valeur propre de $f$ et la définition d'un vecteur propre de $f$.
  (b) Si $E = \mathbb{R}^2$ et $f(x, y) = (3x - 2y, x)$. Trouver les valeurs propres de $f$.
  (c) Trouver les espaces propres de $f$.