UNIVERSITÉ DE BOURGOGNE
U.F.R. Sciences et Techniques
L1-Math 2B : Algèbre linéaire et géométrie

ANNÉE 2022-2023
11 mai 2023

Examen
Durée : 2 heures

JUSTIFIER VOS RÉSULTATS ET MONTRER LES CALCULS

(1) **(5 points)** (Questions du cours) Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. Soit $f : E \to E$ un endomorphisme.

(a) Donner la définition d'une valeur propre et d'un espace propre de f.

(b) Donner la définition du polynôme caractéristique χ_f de f, et montrer que λ est valeur propre de f si et seulement si $\chi_f(\lambda) = 0$.

(c) Soit $A, B \in M_n(\mathbb{K})$ deux matrices carrées. Décider, sans justification, si les énoncés suivants sont VRAIS ou FAUX.

(i) Si A et B sont semblables, alors les valeurs propres de A sont égales aux valeurs propres de B.

(ii) Si A et B ont les mêmes valeurs propres, alors A et B sont semblables.

(iii) 0 est valeur propre de A si et seulement si A n'est pas inversible.

(iv) 1 est valeur propre de A si et seulement si A est la matrice identité.

(2) **(5 points)** Soit $c \in \mathbb{R}$, et soit $A_c = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & c \\ 1 & 0 & -2 & 0 \\ -1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & c \end{pmatrix} \in M_4(\mathbb{R})$.

(a) Déterminer le rang de A_c pour chaque valeur de $c \in \mathbb{R}$.

(b) Pour $c = 0$, déterminer l'inverse de A_0, s'il existe.

(c) Quand A_c n'est pas inversible, trouver une base du noyau et une base de l'image de l'application linéaire $f_c : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ donnée par $f_c(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}) = A_c \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$.

(3) **(5 points)**

(a) Préciser, en utilisant la méthode du pivot de Gauss, pour quelles valeurs du nombre réel a le système d'équations linéaires :

$$\begin{cases} x + y - az = 2 \\ 2x + ay = 1 \\ ax + 2y - az = 1 \end{cases}$$

a zéro, une ou une infinité de solutions.

(b) Pour $a = -1$, trouver l'ensemble des solutions.

(c) Existe-t-il un vecteur $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ tel que le système (avec $a = -1$)

$$\begin{cases} x + y + z = b_1 \\ 2x - y = b_2 \\ -x + 2y + z = b_3 \end{cases}$$

ait une unique solution ? Justifier votre réponse.

(4) **(5 points)** Notons $\mathcal{C} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $\mathcal{B}$ l'ensemble de vecteurs $\mathcal{B} = (e_1 + e_2 - e_3, e_2 + e_3, e_1 - e_3)$. Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'endomorphisme tel que

$$Mat(f; \mathcal{C}) = M = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -4 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

(a) Montrer que $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

(b) En utilisant la matrice de passage, déterminer la matrice $Mat(f; \mathcal{B})$.

(c) Déterminer les valeurs propres de f. Existe-t-il une base $\mathcal{B}'$ de $\mathbb{R}^3$ telle que $Mat(f; \mathcal{B}')$ est diagonalisable ? Justifier votre réponse.