Université de Bourgogne — 12 mai 2023

Licence 1re année — 2022–2023 — UFR Sciences et Techniques

Contrôle terminal — Compléments de mathématiques, Math2C — Durée : 2 heures

Le correcteur portera une attention particulière à la qualité de la rédaction.

L'exercice 6 est un bonus et est optionnel.

Exercice 1. (2pts) Soit $\mathscr{S}$ l'ensemble des fonctions $y\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, solutions de l'équation différentielle

$$9y'' - 12y' + 4y = 0.$$

a) Montrer que $\mathscr{S}$ est un espace vectoriel réel.

b) Trouver une base de $\mathscr{S}$.

Exercice 2. (6pts) On considère le problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} y'' + 2y' + 5y = e^x \cos(3x) \qquad \text{(E)} \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = -1 \end{cases}.$$

a) Trouver la solution générale (réelle) de l'équation homogène associée à (E).

b) Trouver une solution particulière de (E).

c) Résoudre ce problème de Cauchy.

Exercice 3. (6pts) Soient E et F des ensembles non vides. Soit $f\colon E \to F$ une application.

a) Montrer que $\forall B \subset F, f(f^{-1}(B)) \subset B$.

b) Montrer que $\forall B \subset F, f(f^{-1}(B)) = B \cap f(E)$.

c) Montrer l'équivalence : « f est surjective $\iff \forall B \subset F, f(f^{-1}(B)) = B$ ».

Exercice 4. (4pts) On considère la famille d'intervalles $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ où $\forall n \in \mathbb{N}, A_n = [\frac{n}{n+1}, \frac{n^2}{n^2+1}]$.

a) Montrer que pour tout entier $n \geq 2$ on a $\frac{n}{n+1} < \frac{n+1}{(n+1)+1} < \frac{n^2}{n^2+1}$.

b) Déterminer $E := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$.

c) Déterminer $F := \bigcap_{n\geq 2} A_n$.

(On écrira E et F comme union finie d'intervalles.)

Exercice 5. (2pts) Pour un ensemble X, $\mathscr{P}(X)$ désigne l'ensemble des parties de X. Soient E et F des ensembles non vides. A-t-on $\mathscr{P}(E) \cup \mathscr{P}(F) \subset \mathscr{P}(E \cup F)$? A-t-on $\mathscr{P}(E \cup F) \subset \mathscr{P}(E) \cup \mathscr{P}(F)$? Dans chaque cas, montrer l'inclusion si vous pensez qu'elle est vraie, sinon donner un contre-exemple simple.

Exercice 6. (Bonus $\leq$ 3pts) Soit A un ensemble non vide. Soit $\{I_\alpha\}_{\alpha\in A}$ une famille d'intervalles ouverts non vides de $\mathbb{R}$ qui sont deux à deux disjoints.

a) Justifier l'existence d'une fonction $\varphi\colon A \to \mathbb{Q}$ vérifiant $\forall \alpha \in A$, $\varphi(\alpha) \in I_\alpha$.

b) Montrer que φ est injective.

c) En déduire que A est un ensemble au plus dénombrable.