Analyse – Math3A

Temps disponible : 2 heures

Documents et calculatrices interdits. Toutes les réponses doivent être justifiées. On pourra admettre la réponse à une question afin de répondre aux questions suivantes.

Exercice 1. Soit $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une application bornée.

1. *Donner la définition de « f est intégrable sur $[a, b]$ ».*
2. *Définir l'intégrale supérieure $I_+(f)$ et l'intégrale inférieure $I_-(f)$ de f sur $[a, b]$.*
3. *Montrer que f est intégrable sur $[a, b]$ si et seulement si $I_+(f) = I_-(f)$.*
4. Soit $c \in \mathbb{R}$ et $f(x) = c$ si x est rationnel, $f(x) = -c$ si x est irrationnel. Déterminer $I_-(f)$ et $I_+(f)$ puis dire pour quelles valeurs de c, la fonction f est intégrable sur $[a, b]$.

Les questions en italique sont des questions de cours.

Exercice 2. Déterminer le rayon de convergence R des séries entières suivantes, pour $a, b \in \mathbb{N}^*$.

a) $\sum_{n\geq 1} \frac{n^3-n+1}{n} z^n$,

b) $\sum_{n\geq 0}(1 + (-2)^n)z^n$,

c) $\sum_{n\geq 0} b^n \frac{(an)!}{(n!)^a} z^n$;

d) $\sum_{n\geq 0} \frac{3^n}{\sqrt{n+1}} z^{5n+1}$;

e) $\sum_{n\geq 1}(-1)^n \ln\left(\frac{n^2+n+1}{n^2+1}\right) z^n$,

f) $\sum_{n\geq 0} n! z^n$.

Répondre aux questions suivantes :

i) Quelle est la somme de la série a) pour $|z| < R$?

ii) Est-ce que la série e) converge si $z = R$? si $z = -R$?

Exercice 3. Définissons la fonction g par :

$$g(x) = 6x^6 - x^3 - 1.$$

1. Déterminer le développement en série entière $\sum a_n z^n$ de $f = 1/g$ en 0 puis son rayon R.
2. Trouver tous les points $w \in \mathbb{C}$ avec $|w| = R$ tels que $\lim_{z\to w} f(z) = \infty$.
3. Déterminer le développement en série entière $\sum b_n z^n$ de $h = \ln(-g)$ en 0 puis son rayon S.
4. Quel est le rapport entre S et R ? Pour $n \in \mathbb{N}$, quelle est la relation entre a_n et b_n ?

Exercice 4. Soit f développable en série entière autour de 0, solution de l'équation différentielle :

$$xf''(x) + 2f'(x) + xf(x) = 0, \qquad f(0) = 1.$$

Soit $\sum a_n x^n$ le développement en série entière de f autour de 0 et R son rayon.

1. Montrer que $a_{2\ell+1} = 0$, pour tout $\ell \in \mathbb{N}$.
2. Trouver une relation de récurrence sur les termes de la suite $(a_{2\ell})_{\ell\in\mathbb{N}}$.
3. Déterminer R puis calculer $f(m\pi)$ pour tout $m \in \mathbb{Z}$.