Examen

Décembre 2022. Durée 2h

Toutes les réponses doivent être justifiées avec soin

Exercice 1. (Questions de cours) *(6 points)*

1. Enoncer le théorème de décomposition de Dunford.
   Application. Calculer la décomposition de Dunford des matrices suivantes ($a, b \neq 0$).
   $$A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
2. Enoncer et démontrer le lemme de décomposition des noyaux lorsque le polynôme P est le produit de deux polynômes premiers entre eux.
   Application. Soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{R}-$espace vectoriel E de dimension finie vérifiant $f^3 = id_E$. Justifier que les espaces $Ker(f - id_E)$ et $Ker(f^2 + f + id_E)$ sont supplémentaires.

Exercice 2. (Maîtrise des concepts) *(4 points)* Que pensez-vous des affirmations suivantes ? Les réponses doivent être justifiées avec rigueur et détail. Toute réponse non justifiée ne sera pas prise en compte.

1. Si A est diagonalisable dans $\mathbb{K}$, alors A^2 est aussi diagonalisable dans $\mathbb{K}$.
2. Soient $a, b \in \mathbb{R}^*$ et $A = \begin{pmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{pmatrix}$. Alors A et A^2 sont diagonalisables dans $\mathbb{R}$.
3. Toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, dont le polynôme caractéristique P_A est donné par $P_A(X) = (X-1)^n$, admet une décomposition de Dunford de la forme $A = I + N$ avec N une matrice nilpotente et I la matrice identité.
4. Si la matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est telle que $(A - 7I)^7 = 0$, avec I la matrice identité d'ordre n, alors son polynôme minimal $\mu_A(X)$ divise $(X-7)^7$ et son polynôme caractéristique est $P_A(X) = (7-X)^n$.

Exercice 3. *(4 points)* On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & -8 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que A est trigonalisable mais non diagonalisable.
2. Soit $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 3$. En effectuant la division euclidienne de X^k par le polynôme caractéristique P_A de A et en appliquant le théorème de Cayley-Hamilton, déterminer des nombres réels a_k, b_k et c_k tels que $A^k = a_k A^2 + b_k A + c_k I$, où I est la matrice identité d'ordre 3.

Exercice 4. *(6 points)* Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est donnée par

$$M := \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

1. Calculer le polynôme caractéristique P_M. En déduire que le spectre de M est $\{2, 4\}$.
2. Justifier que M est trigonalisable mais qu'elle n'est pas diagonalisable.
3. Calculer les espaces propres et les espaces caractéristiques associés aux valeurs propres de M.
4. Calculer les matrices des deux projecteurs spectraux correspondants.
5. En déduire la décomposition de Dunford de M.
6. Soit $t \in \mathbb{R}$. Calculer $\exp(tM)$ et en déduire l'unique solution du système différentiel
   $$X' = MX, \text{ avec la condition initiale } X(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$