L2 : Probabilités **Date** : Jeudi 15 décembre 2022 **Durée** : 2h

Examen de Probabilités

Exercice 1 : Deux tireurs Alice et Bob tirent une fois au but chacun indépendamment. La probabilité de marquer le but par Alice est égale à 0.8 et celle de Bob est de 0.5. On notera A l'événement "Alice marque", B l'évément "Bob marque" et S l'événement "un seul but est marqué".

▷ **1)** Calculer $\mathbb{P}(S)$. On justifiera soigneusement.

▷ **2)** Vous êtes allé aux toilettes pendant cette séance de tirs. À votre retour vous constatez qu'il n'y a eu qu'un seul but de marqué. Avec quelle probabilité a-t-il été marqué par Alice ?

Exercice 2 : Soit X une variable aléatoire de loi uniforme sur $\{1, 2, 3\}$ et Y une variable aléatoire sur $\{1, 2\}$ indépendante de X telle que $\mathbb{P}(Y = 2)$ soit deux plus grand que $\mathbb{P}(Y = 1)$.

▷ **1)** Déterminer l'espérance et la variance de X et tracer sa fonction de répartition.

▷ **2)** Déterminer $\mathbb{P}(Y = 1)$ et $\mathbb{P}(Y = 2)$ et calculer l'espérance et la variance de Y.

▷ **3)** En déduire l'espérance de $X + Y$ et de XY.

▷ **4)** Déterminer les lois de $X + Y$ et de XY.

Exercice 3 : Une secrétaire effectue, une première fois, des appels téléphoniques vers n correspondants distincts. On admet que les n appels constituent n expériences indépendantes et que, pour chaque appel, la probabilité d'obtenir le correspondant est p, $0 < p < 1$. Soit X la variables aléatoire représentant le nombre de correspondants obtenus et Y le nombre de correspondants qu'elle n'a pas pu joindre.

▷ **1)** Quelles sont les lois de X et Y ? On justifiera.

▷ **2)** Les variables X et Y sont-elles indépendantes ? On justifiera rigoureusement.

▷ **3)** Combien en moyenne la secrétaire obtient-elle de correspondants ?

▷ **4)** La secrétaire rappelle une seconde fois, dans les mêmes conditions, chacun des Y correspondants qu'elle n'a pas pu joindre au cours de la première série d'appels. On note Z la variable aléatoire représentant le nombre de personnes jointes au cours de la seconde série d'appels.

(a) Justifier que

$$Z = \sum_{k=1}^{Y} \xi_k = \sum_{k=1}^{n-X} \xi_k$$

où les variables aléatoire $\xi_1, \cdots, \xi_n$ sont indépendantes et identiquement distribuées de loi de Bernoulli de paramètre p et indépendantes de X et de Y.

(b) Soit $0 \leq i \leq n$ et $0 \leq k \leq n - i$. Déterminer $\mathbb{P}(Z = k|X = i)$.

(c) Que représente la variable aléatoire $X + Z$? Montrer que $X + Z$ suit une loi binomiale dont on déterminera le paramètre. On pourra utiliser l'identité $\binom{n-i}{k-i}\binom{n}{i} = \binom{k}{i}\binom{n}{k}$.

Exercice 4 : Soit X une variable aléatoire de loi géométrique de paramètre $0 < p < 1$. Montrer que pour tout $n, m \in \mathbb{N}$ on a $\mathbb{P}(X > n + m|X > m) = \mathbb{P}(X > n)$.

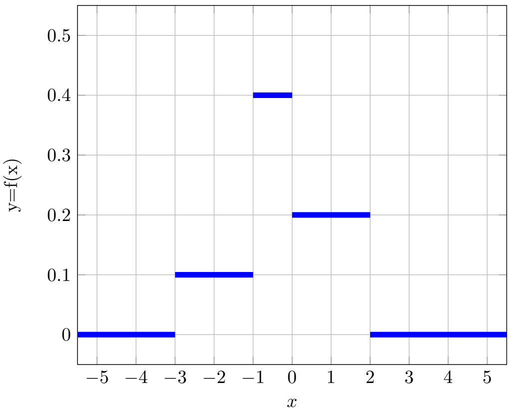
Exercice 5 : Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilisé. Démontrer par récurrence la formule du crible : $\forall k \geq 1, \forall A_1, \cdots, A_k \in \mathcal{F}$,

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{k} A_i\right) = \sum_{I \subset [|1,N|], I \neq \emptyset} (-1)^{\mathrm{card}(I)-1}\, \mathbb{P}\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right).$$

Par exemple lorsque $k = 3$, les sous-ensembles non-vides $I \subset \{1,2,3\}$ peuvent avoir $1, 2$ ou 3 éléments et sont $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$, $\{1,2\}$, $\{1,3\}$, $\{2,3\}$ et $\{1,2,3\}$ ce qui donne

$$\mathbb{P}(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2) + \mathbb{P}(A_2) - \mathbb{P}(A_1 \cap A_2) - \mathbb{P}(A_1 \cap A_3) - \mathbb{P}(A_2 \cap 3) + \mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3).$$

Exercice 6 : Soit X une variable aléatoire réelle de densité f donnée graphiquement ci-dessous.



- ▷ **1)** Calculer $\mathbb{P}(X \leq -1)$.
- ▷ **2)** Calculer $\mathbb{P}(X > 1)$.
- ▷ **3)** Calculer $\mathbb{P}(-2 \leq X < 0.5)$.
- ▷ **4)** Calculer $\mathbb{P}(X = 2)$.
- ▷ **5)** Calculer et tracer la fonction de répartition de X.