Math3E
Université de Bourgogne
Structures fondamentales

Année 2022-2023
17 décembre

Contrôle terminal – 2h

Aucun document ou calculatrice n'est autorisé.

Justifiez vos affirmations. Une attention particulière sera portée à la rédaction.

Pour toute la suite, G et G' sont deux groupes dont les lois sont notées multiplicativement et dont les éléments neutres sont notés respectivement e et e'.

Exercice 1.
Soit $\psi\colon G \to (\mathbb{R}^*, \times)$ un morphisme de groupes. On suppose que G est un groupe fini. On suppose également que $\ker(\psi) \neq G$ et on pose $K := \ker(\psi)$.
1) Si $x \in G \setminus K$, déterminer $\psi(x)$.
2) Soit $z, y \in G$. A-t-on $\psi(yzy^{-1}) = \psi(z)$?
3) Soit $x \in G \setminus K$. Montrer que $xK := \{xy \,|\, y \in K\}$ vérifie
i) $xK \cap K = \varnothing$,
ii) $G = K \cup xK$,
iii) $\mathrm{Card}(xK) = \mathrm{Card}(K)$.

Exercice 2.
On suppose que G est fini et d'ordre impaire.
1) Montrer que si $x \in G$ vérifie $x^2 = e$ alors $x = e$.
2) Montrer que pour tout $x \in G$ il existe $y \in G$ tel que $y^2 = x$.

Exercice 3.
Soit H un sous-groupe de G. Soit H' un sous-groupe de G'. Soit $f\colon G \to G'$ un morphisme de groupes.
1) Montrer, en partant de la définition d'un morphisme de groupes, que $f(e) = e'$.
2) A-t-on forcément que $f(H)$ est un sous-groupe de G' ? Si oui le montrer. Si non, donner un contre-exemple.
3) A-t-on forcément que $f^{-1}(H')$ est un sous-groupe de G ? Si oui le montrer. Si non, donner un contre-exemple.

Exercice 4.
Si $f \in S_n$, on note $\mathrm{supp}(f)$ le support de f défini par

$$\mathrm{supp}(f) = \{i \in [\![1;n]\!] \,|\, f(i) \neq i\}.$$

1) Donner le support de $\begin{pmatrix}1 & 3 & 6 & 4 & 2 & 5\end{pmatrix}$.
2) Montrer que si $i \in \mathrm{supp}(f)$ alors $f(i) \in \mathrm{supp}(f)$.
3) Soit $f, g \in S_n$ tels que $\mathrm{supp}(f) \cap \mathrm{supp}(g) = \varnothing$. Montrer que $f \circ g = g \circ f$.

Exercice 5.
Soit H et F deux sous-groupes de G. On note $HF = \{ab \,|\, a \in H,\ b \in F\}$. Montrer que HF est un sous-groupe si et seulement si $HF = FH$ (où $FH = \{ba \,|\, a \in H,\ b \in F\}$).