L2 MATH4A, 2ème session

08, juin 2023

Durée : 2h00. Tout document et appareil électronique interdit. Toute affirmation non-triviale doit être justifiée.

Exercice 1 (3 pts). Étudier la convergence de l'intégrale suivante

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{t}} \sin\left(\frac{1}{t}\right)\, dt.$$

Exercice 2 (4 pts). Soit $\delta \in]0,1[$; on pose $I(\delta) = \displaystyle\int_\delta^1 \frac{\ln x}{(1+x)^2}\, dx$.

1) Montrer que

$$I(\delta) = -\ln 2 - \frac{\delta \ln \delta}{1+\delta} + \ln(1+\delta).$$

2) Calculer $\lim\limits_{\delta \to 0} I(\delta)$.

Exercice 3 (4 pts) Soit $I = [1, +\infty[$, et $f_n(x) = \ln\big(x + \frac{1}{n}\big)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in I$.

1) Montrer que la suite de fonctions $(f_n)_{n\geq 1}$ converge simplement sur I vers une fonction f, à expliciter.

2) La suite de fonctions $(f_n)_{n\geq 1}$ converge-t-elle uniformément sur I lorsque $n \to +\infty$?

Exercice 4 (5 pts) Soit $u_n(x) = \dfrac{1}{n^2 + \sin(nx)}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$.

1) Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} u_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$.

2) On note par f la somme de cette série : $f = \displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} u_n$. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.

3) Monrer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

Exercice 5 (5 pts) Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(0,0) = 0$ et

$$f(x,y) = \frac{4xy}{\sqrt{x^2+y^2}} \text{ si } (x,y) \neq (0,0).$$

1) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$.

2) Calculer $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ pour $(x,y) \neq (0,0)$.

3) Etudier la limite $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$.