CONTRÔLE TERMINAL – MATH4A

Durée 2h00. Tout document interdit. Toute affirmation non-triviale doit être justifiée.

Exercice 1 (6 pts).

a) (*Question de cours*). Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle est $f_n : I \to \mathbb{R}$ une suite de fonctions. Montrer que (f_n) est uniformément de Cauchy sur I si et seulement si elle converge uniformément sur I.

b) (*Question de cours*). Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle est $f_n : I \to \mathbb{R}$ une suite de fonctions. Montrer que si (f_n) converge uniformément sur I vers une fonction $f : I \to \mathbb{R}$, alors elle converge simplement sur I vers f.

c) Montrer que si $P \in \mathbb{R}[x]$ est un polynôme borné sur $\mathbb{R}$, alors P est constant.

Pour résoudre la suite, on suggère d'utiliser les trois questions a), b), c).

d) Soit $(P_n) \subset \mathbb{R}[x]$ une suite de polynômes qui convergent uniformément sur $\mathbb{R}$ vers une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Montrer la propriété suivante :

$$\exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N \quad \exists a_n \in \mathbb{R} \quad \text{tel que } P_n(x) = P_N(x) + a_n \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

e) Montrer que la suite $(a_n) \subset \mathbb{R}$ converge vers un réel $a \in \mathbb{R}$.

f) Conclure que la suite de polynômes (P_n) converge uniformément vers un polynôme.

Exercice 2 (*Exercice de TD*, 6pts). On considère la série de fonctions S définie par

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{x+n}$$

a) Prouver que S est définie sur $I =]-1, +\infty[$,

b) Prouver que S est continue sur I.

c) Prouver que S est dérivable sur I, calculer sa dérivée, et en déduire que S est croissante sur I.

Exercice 3 (4 pts). On considère la fonction $N : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie par

$$N(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2} + |z|.$$

a) Prouver que N définit une norme sur $\mathbb{R}^3$.

b) Dessiner approximativement la sphère unité $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : N(x,y,z) = 1\}$. Pouvez-vous donner le nom de cette figure géométrique ?

c) Soit $\|(x,y,z)\|_\infty = \max\{|x|,|y|,|z|\}$ la norme ℓ^∞ sur $\mathbb{R}^3$. Déterminer les constantes optimales $c < C$ telles que

$$c\|(x,y,z)\|_\infty \leq N(x,y,z) \leq C\|(x,y,z)\|_\infty \quad \forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3.$$

Exercice 4 (6 pts). Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} (x-y)^2 \ln(|e^x - e^y|) & \text{si } x \neq y, \\ 0 & \text{si } x = y. \end{cases}$$

a) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$.

b) Calculer les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ en tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $x \neq y$.

c) Est-ce que les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ existent aux points de la forme (x,x), avec $x \in \mathbb{R}$?

d) Est-ce que f est différentiable aux points de la forme (x,x), avec $x \in \mathbb{R}$?