Université de Bourgogne
Licence Sciences, Technologies, Santé, 2ème année

Lundi 5 juin 2023
13h30-15h30

Examen de Mathématiques - Session 1 - Math4B

Exercice 1 :

Soit $(E, \langle\ |\ \rangle)$ un espace préhilbertien réel.

1. Soit p un entier naturel non nul et $\mathcal{F} = \{x_1, \dots, x_p\}$ une famille orthogonale constituée de vecteurs non nuls. Montrer que la famille $\mathcal{F}$ est libre.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(e_1, e_2, \cdots, e_n)$ une famille de vecteurs unitaires de E tels que : $\forall x \in E,\ \ ||x||^2 = \sum_{i=1}^n \langle x \mid e_i \rangle^2$.
   (a) Montrer que la famille $(e_1, e_2, \cdots, e_n)$ est une famille orthonormale.
   (b) Montrer que $\forall x \in E,\ x = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \langle x \mid e_i \rangle\, e_i$.
   (c) En déduire que E est de dimension finie et que la famille $(e_1, e_2, \cdots, e_n)$ est une base orthonormale de E.
3. On suppose que $(E, \langle | \rangle)$ est un espace euclidien et f un **automorphisme orthogonal** de E.
   (a) Soit F un sous espace vectoriel de E. Montrer que $f(F^\perp) = \big(f(F)\big)^\perp$.
   (b) On note par $Sp(f)$, le spectre de f qui est l'ensemble des valeurs propres de f. Montrer que $Sp(f) \subset \{1, -1\}$.

Exercice 2 :

On considère $\mathbb{R}^4$ muni de son produit scalaire canonique. On note par $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ la base canonique. Soit F le sous ensemble défini par $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 :\ x + 3y - z - t = 0,\ x + z + t = 0\}$.

1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$, préciser sa dimension et en donner une base.
2. À l'aide du procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt construire une base orthonormale de F.
3. Soit $u = (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$, et $v = (x', y', z', t') = p_F(u)$ le projeté orthogonal du vecteur u sur F.
   (a) Calculer (x', y', z', t') en fonction de (x, y, z, t) et donner la matrice associée à p_F dans la base canonique $\mathcal{B}$.
   (b) On prend $u = (1, 3, 2, 2)$. Quelle est la distance de u à F?

Exercice 3 : On considère l'espace euclidien E orienté de dimension 3 et $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base directe de E. Soient f et g deux endomorphismes dont matrices associées dans la base$\mathcal{B}$ sont

$$A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(g) = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} a & 1 & \sqrt{6} \\ 1 & b & -\sqrt{6} \\ -\sqrt{6} & \sqrt{6} & c \end{pmatrix}, \ a, b, c \in \mathbb{R}$$

1. Montrer que l'endomorphisme f est diagonalisable et donner ses valeurs propres de f ainsi q'une base orthonormale de vecteurs propres de f ~~est~~
2. (a) Déterminer les valeurs ~~de~~ des paramètres a, b, c pour que g soit un automorphisme orthogonal.
   (b) Montrer que dans ce cas l'isométrie g est une rotation dont on précisera l'axe et l'angle dans un repère direct.

Exercice 4 : E désigne un espace euclidien de dimension n. On note $(x|y)$ le produit scalaire de x et de y. Si f est un endomorphisme de E, on désigne par f^* son adjoint. On se donne une base orthonormale $\mathcal{B}_1$ de E et on note A et A' les matrices associées à f et f^* dans la base $\mathcal{B}_1$. On pose $g = f \circ f^*$.

1. Montrer que g est un endomorphisme symétrique de E.
2. Justifier que les valeurs propres de g sont positives ou nulles et que g admet une base orthonormale de vecteurs propres.

Dans la suite on suppose que f est bijectif et on désigne par $\mathcal{B}_2 = (\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n)$ une base orthonormale de vecteurs propres associés aux valeurs propres strictement positives $(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$ de g.

3. On désigne par s l'endomorphisme de E tel que $\forall i \in \{1, \dots, n\},\ \ s(\varepsilon_i) = \sqrt{\lambda_i}\, \varepsilon_i$.
   (a) Montrer que s est un endomorphisme symétrique bijectif et que $s \circ s = g$.
   (b) On pose $\varphi = s^{-1} \circ f$. Montrer que $\varphi \circ \varphi^* = \mathrm{Id}_E$ et en déduire que φ est un automorphisme orthogonal.
4. Déduire de ce qui précède que si f est un endomorphisme (bijectif) d'un espace euclidien, alors il existe un endomorphisme (bijectif) symétrique s et un automorphisme orthogonal φ tel que $f = s \circ \varphi$.