Examen de Mathématiques - Session 1 - Math4B

Exercice 1 (Questions de cours) :

1. Soient E un espace euclidien, F un sous-espace de E et $f \in \mathcal{L}(E)$ et f^* son adjoint. Montrer que
   (a) $\operatorname{Im}(f^*) = \left(\ker f\right)^{\perp}$ et $\ker f^* = \left(\operatorname{Im} f\right)^{\perp}$ et $\operatorname{rg}(f) = \operatorname{rg}(f^*)$
   (b) F est stable par f si et seulement si $F^{\perp}$ est stable par f^*.
2. Soit E un espace euclidien et f un endomorphisme symétrique de matrice associée A dans une base orthonormale $\mathcal{B}$. Montrer que le polynôme caractéristique de f est scindé sur $\mathbb{R}$.

Exercice 2 : Soient E un espace euclidien orienté de dimension 3, $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base orthonormale **directe** de E et f et g deux endomorphismes de E dont les matrices associées dans la base $\mathcal{B}$ sont respectivement

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} -2 & -3 & 6 \\ 6 & 2 & 3 \\ -3 & 6 & 2 \end{pmatrix}$$

1. Montrer que f est ortho-diagonalisable et trouver P orthogonale telle que ${}^tPAP$ soit diagonale.
2. Montrer que g est une isométrie de E et préciser sa nature en donnant les éléments caractéristiques.

Exercice 3 : Soient E un espace euclidien de dimension $n \geq 2$, a et b deux vecteurs **unitaires et orthogonaux** de E et k, α et β trois nombres réels non nuls fixés. On note $F = Vect(a, b)$ le sous espace vectoriel de E engendré par a et b. On désigne par $f : E \longrightarrow E$ l'application définie par

$$\forall x \in E, f(x) = kx - \alpha \langle x \mid a \rangle a - \beta \langle x \mid b \rangle b$$

1. Montrer que f est un endomorphisme de E.
2. Calculer $f(a)$ et $f(b)$ en fonction de a, b, α, β et k.
3. Rappeler la définition d'un endomorphisme symétrique et donner l'énoncé du théorème spectral.
4. Montrer que f est un endomorphisme symétrique.
5. Préciser les valeurs propres et les sous espaces propres de f.
6. (a) Montrer que l'endomorphisme f est un automorphisme orthogonal si et seulement si $k = 1$ et $\alpha = \beta = 2$ ou bien $k = -1$ et $\alpha = \beta = -2$
   (b) Montrer que si $k = 1$ et $\alpha = \beta = 2$ alors f est une symétrie orthogonale par rapport au sous espace $F^{\perp}$.
   (c) Préciser également la nature de l'isométrie f dans le cas où $k = -1$ et $\alpha = \beta = -2$

Exercice 4 : On note $E_n = \mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à n et $\mathcal{B} = \{1, X, X^2, \cdots, X^n\}$ la base standard de E_n. Soit $\varphi : E_n \times E_n \longmapsto \mathbb{R}$ l'application définie par

$$\forall (P, Q) \in E_n \times E_n,\ \varphi(P, Q) = \int_{-1}^{1} (1 - t^2) P(t) Q(t) \mathrm{dt}.$$

1. Montrer que φ définit un produit scalaire sur E_n que l'on notera par $\langle \mid \rangle$ par la suite.
2. Soit $f : E_n \longrightarrow E_n$ l'application définie par

$$\forall P \in E_n,\ f(P) = (X^2 - 1)P'' + 4XP'.$$

   (a) Montrer que f est un endomorphisme de E_n.
   (b) Calculer $f(X^k)$ pour $k \in \{0, 1, \cdots n\}$ et en déduire la matrice de f dans la base $\mathcal{B} = \{1, X, X^2, \cdots, X^n\}$.
   (c) Montrer que f est un endomorphisme autoadjoint. f est-il diagonalisable? Justifier. (On pourra utiliser une intégration par partie de $\displaystyle\int_{-1}^{1} -(1 - t^2)^2 P''(t) Q(t) \mathrm{dt}$.)
   (d) Dans la cas $n = 2$, déterminer une base orhonormale de vecteurs propres de f et donner la matrice de f dans cette base.