Examen - Géométrie. Durée 2h00.

Remarques.

— **Soignez la rédaction et vos figures.**

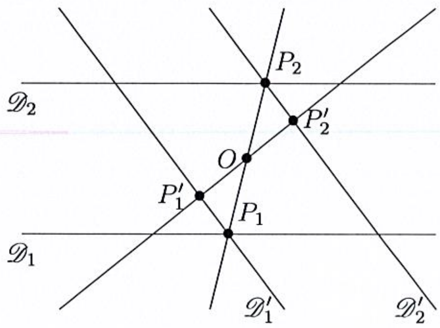
— **Vous prendrez soin de ne pas laisser des nombres complexes au dénominateur : les résultats sont attendus sous la forme réduite $a + ib$ où a et b sont des réels.**

— **Rappel de notations : pour deux points (distincts) A et B, (AB) désigne la droite passant par A et B, $[AB]$ le segment joignant A à B, AB la longueur de ce segment, $\overline{AB}$ la mesure algébrique d'origine A et d'extrémité B, $\overrightarrow{AB}$ le vecteur d'origine A et d'extrémité B.**

⋆⋆⋆

Exercice 1. Transformation affine. On se place dans un plan affine $\mathscr{P}$. On considère une transformation affine $f : \mathscr{P} \to \mathscr{P}$ (on rappelle qu'une transformation affine est une bijection).

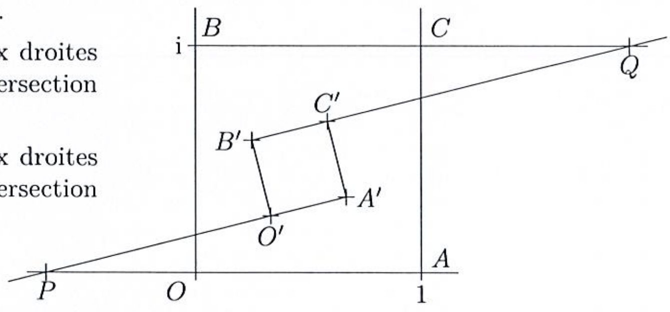
1. Questions de cours préliminaires.
   (a) Expliquer pourquoi si f fixe trois point non alignés de $\mathscr{P}$, alors f est l'application identité.
   (b) Expliquer pourquoi f envoie toute droite sur une droite.
   (c) Expliquer pourquoi f envoie deux droites strictement parallèles sur deux droites strictement parallèles.
2. Soient $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$ deux droites parallèles d'images $\mathscr{D}_1' = f(\mathscr{D}_1)$ et $\mathscr{D}_2' = f(\mathscr{D}_2)$. On suppose que $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_1'$ sont sécantes (et donc $\mathscr{D}_2$ et $\mathscr{D}_2'$ également). On note P_1 le point d'intersection de $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_1'$, P_2 celui de $\mathscr{D}_2$ et $\mathscr{D}_2'$, $P_1' = f(P_1)$ et $P_2' = f(P_2)$ leurs images par f. On suppose que (P_1P_2) et $(P_1'P_2')$ sont sécantes en un point O. On note $O' = f(O)$.
   (a) Justifier que $\frac{\overline{OP_2}}{\overline{OP_1}} = \frac{\overline{OP_2'}}{\overline{OP_1'}}$;
   (b) En utilisant le fait que f est affine, justifier que $\frac{\overline{O'P_2'}}{\overline{O'P_1'}} = \frac{\overline{OP_2}}{\overline{OP_1}}$;
   (c) En déduire que O est un point fixe de f (autrement dit $O = O'$).



⋆⋆⋆

Exercice 2. Similitudes. On se place dans un plan affine euclidien rapporté au plan complexe $\mathbb{C}$. On note O l'origine d'affixe 0, A le point d'affixe 1, B le point d'affixe i et C le point d'affixe $1 + \mathrm{i}$. On considère la similitude directe s envoyant le point O sur O' d'affixe $z_0 = \frac{1}{3} + \frac{1}{4}\mathrm{i}$ et le point A sur le point A' d'affixe $z_1 = \frac{2}{3} + \frac{1}{3}\mathrm{i}$.

1. Soit M un point d'affixe z. Exprimer l'affixe z' de son image $M' = s(M)$ en fonction de z.
2. Donner les affixes z_2 de $B' = s(B)$ et z_3 de $C' = s(C)$.
3. Donner les équations cartésiennes complexes des deux droites (OA) et $(O'A')$ et en déduire l'affixe p du point d'intersection P de (OA) et $(O'A')$.
4. Donner les équations cartésiennes complexes des deux droites (BC) et $(B'C')$ et en déduire l'affixe q du point d'intersection Q de (BC) et $(B'C')$.
5. Déterminer l'affixe ω du point fixe Ω par s.
6. Montrer que les points P, Q, Ω sont alignés.



⋆⋆⋆

Exercice 3. Barycentres. On se place dans un espace affine $\mathscr{E}$ quelconque. On considère deux sous-ensembles convexes non vides $\mathscr{A}$ et $\mathscr{B}$.

1. Rappeler la définition d'un sous-ensemble convexe non vide $\mathscr{C}$ de $\mathscr{E}$.
2. Soient A_0 et A_1 deux points de $\mathscr{A}$ et B_0 et B_1 deux points de $\mathscr{B}$. Soient s, t, u trois réels dans $[0,1]$. On note
$$C_0 = \mathrm{Bar}\begin{pmatrix} A_0 & B_0 \\ 1-s & s \end{pmatrix} \quad C_1 = \mathrm{Bar}\begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ 1-t & t \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad C = \mathrm{Bar}\begin{pmatrix} C_0 & C_1 \\ 1-u & u \end{pmatrix}.$$
Montrer qu'il existe $A \in \mathscr{A}$ et $B \in \mathscr{B}$ tels que $C \in [AB]$.
3. En déduire que l'ensemble
$$\mathscr{C} = \left\{ \mathrm{Bar}\begin{pmatrix} A & B \\ 1-v & v \end{pmatrix} : A \in \mathscr{A},\ B \in \mathscr{B},\ v \in [0,1] \right\}$$
est un convexe.
4. Montrer que c'est l'enveloppe convexe de $\mathscr{A} \cup \mathscr{B}$.

⋆⋆⋆

Exercice 4. Lieux géométriques. On se place dans un plan affine euclidien $\mathscr{P}$. Soient A, B et C les trois sommets d'un triangle équilatéral. Déterminer, puis représenter graphiquement les trois ensembles Γ_1, Γ_2 et Γ_3 suivants sur un même dessin.

1. $\Gamma_1 = \left\{ M \in \mathscr{P} : \|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\| = AB \right\}$;
2. $\Gamma_2 = \left\{ M \in \mathscr{P} : \|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\| = \|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 4\overrightarrow{MC}\| \right\}$;
3. $\Gamma_3 = \left\{ M \in \mathscr{P} : \|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}\| = \|\overrightarrow{MC}\| \right\}$ (*indication : on pourra factoriser* $\|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}\|^2 - \|\overrightarrow{MC}\|^2$)