

Exercice I.

a) Résoudre l'équation différentielle

$$\frac{dx}{dt} = axt, \quad (1)$$

où a est une constante réelle

b) Résoudre l'équation différentielle

$$\frac{dx}{dt} = Axt, \quad (2)$$

où $A = \begin{bmatrix} 0 & a \\ a & 0 \end{bmatrix}$ est une matrice réelle.

Pour calculer une fonction f de la matrice A , on utilisera le théorème de décomposition spectrale :

$f(A) = \sum_i f(\lambda_i) |u_i\rangle\langle u_i|$ avec les valeurs propres λ_i et les vecteurs propres (normés) associés $|u_i\rangle$ de A .

Exercice II.

A) On résout l'équation différentielle de Laguerre, où $y \equiv y(x)$, par la méthode de Frobenius

$$xy'' + (1-x)y' + \alpha y = 0. \quad (3)$$

- 1) Montrer que $x = 0$ est une singularité régulière.
- 2) A partir du développement en série

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{k+n}, \quad (4)$$

- (a) déterminer l'équation indicelle ;
- (b) déterminer la relation de récurrence entre a_{n+1} et a_n .
- 3) Résoudre l'équation indicelle, et en déduire l'expression de la solution

$$y(x) = a_0 \left[1 - \alpha x - \frac{\alpha(1-\alpha)}{2^2} x^2 - \frac{\alpha(1-\alpha)(2-\alpha)}{3^2 2^2} x^3 - \dots \right]. \quad (5)$$

- 4) Quelles sont les valeurs de α qui donnent une série avec un nombre fini de termes ?
 On les note $y(x) = L_\alpha(x)$. Exprimer $L_1(x)$, $L_2(x)$, $L_3(x)$ et $L_4(x)$ (on choisira la normalisation $a_0 = 1$).

B) Vérifier que

$$y_2(x) = y(x) \ln(x) + \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n \quad (6)$$

est une seconde solution, où $y(x)$ sont les solutions obtenues précédemment.

On reportera $y_2(x)$ dans l'équation et on déterminera la récurrence entre les coefficients b_{n+1} et b_n .

Exercice III. Dans cet exercice, on note la transformée de Fourier $F(\nu) \equiv \mathcal{F}_\nu[f(x)] = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-2i\pi\nu x} dx$.

Soit la fonction triangle $f(x) = \begin{cases} 1+x & \text{pour } -1 \leq x < 0 \\ 1-x & \text{pour } 0 \leq x < 1 \\ 0 & \text{pour } |x| > 1 \end{cases}$

1. Calculer la transformée de Fourier de $f(x)$. La tracer.
2. En utilisant la formule de Parseval-Plancherel

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \bar{g}(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} F(\nu) \bar{G}(\nu) d\nu, \quad (7)$$

où on note $\bar{g}(x)$ le complexe conjugué de $g(x)$, en déduire la valeur de l'intégrale

$$I = \int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin(x)}{x} \right)^4 dx. \quad (8)$$