Université de Bourgogne
Examen de Méthodes Mathématiques - Janvier 2023
Durée : 2h. Aucun document n'est autorisé.

Exercice I.

A) On résout l'équation différentielle de Tchebychev, où $y \equiv y(x)$, par la méthode de Frobenius

$$(1-x^2)y'' - xy' + n^2 y = 0. \tag{1}$$

1) Montrer que $x = \pm 1$ sont des singularités régulières.
2) A partir du développement en série autour de 0

$$y(x) = \sum_{p=0}^{\infty} a_p x^{k+p}, \tag{2}$$

(a) déterminer et résoudre l'équation indicielle;
(b) déterminer la relation de récurrence entre a_{p+2} et a_p.
(c) Etudier la convergence des séries obtenues.

3) Montrer alors que les deux possibles solutions s'écrivent

$$y(x) = a_0\left[1 - \frac{n^2}{2}x^2 - \frac{n^2(4-n^2)}{2\times 15}x^4 + \cdots\right], \tag{3}$$

$$y(x) = a_0 x\left[1 + \frac{1-n^2}{6}x^2 + \frac{(1-n^2)(9-n^2)}{6\times 20}x^4 + \cdots\right]. \tag{4}$$

4) Montrer que les valeurs de n entières donnent une série avec un nombre de termes fini.
On les note $y(x) = T_n(x)$ pour les valeurs de n respectives. Exprimer $T_0(x)$, $T_1(x)$, $T_2(x)$ et $T_3(x)$ (on choisira la normalisation $a_0 = 1$).

B) On s'intéresse au cas $n = 1$, c'est-à dire à la solution $z(x) = T_1(x)$. On recherche une seconde solution. On sait qu'elle s'écrit sous la forme

$$z(x) = C(x)y(x). \tag{5}$$

a) En partant de l'expression générale de l'équation différentielle linéaire du second ordre

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0, \tag{6}$$

montrer, en reportant la second solution $z(x)$, que $C(x)$ s'écrit à des constantes près

$$C(x) = \int^x \frac{e^{-\int^{x'} P(x'')dx''}}{[y(x')]^2}dx'. \tag{7}$$

b) En déduire la seconde solution $z(x)$. Vérifier qu'elle est linéairement indépendante de $y(x)$.

Formulaire :

$$\ln(f(x))' = \frac{f'(x)}{f(x)}, \qquad \int^x \frac{1}{x'^2\sqrt{1-x'^2}}dx' = -\frac{\sqrt{1-x^2}}{x} + const. \tag{8}$$

Exercice II. Dans cet exercice, on note la transformée de Fourier $F(\nu) \equiv \mathcal{F}_\nu[f(x)] = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-2i\pi\nu x}dx$.

Soit la fonction triangle $f(x) = \begin{cases} 1+x & \text{pour } -1 \le x < 0 \\ 1-x & \text{pour } 0 \le x < 1 \\ 0 & \text{pour } |x| > 1 \end{cases}$

1. Calculer la transformée de Fourier de $f(x)$. La tracer.
2. Démontrer la formule de Parseval-Plancherel pour deux fonctions complexes $f(x)$ et $g(x)$ ayant pour transformée de Fourier respective $F(\nu)$ et $G(\nu)$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\bar{g}(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} F(\nu)\bar{G}(\nu)d\nu, \tag{9}$$

où on note $\bar{g}(x)$ le complexe conjugué de $g(x)$.
Méthode :

- on utilisera $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\bar{g}(x)dx = \mathcal{F}_{\nu=0}[f(x)\bar{g}(x)]$,
- on passera par le produit de convolution de deux fonctions $f_1(t)$ et $f_2(t)$: $f_1(t) * f_2(t) = \int f_1(s)f_2(t-s)ds$,
- en utilisant sa propriété : $f_1(t) * f_2(-t) = \int f_1(s)f_2(s-t)ds$.

3. En utilisant la formule de Parseval-Plancherel, en déduire la valeur de l'intégrale

$$I = \int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin(x)}{x}\right)^4 dx. \tag{10}$$

Exercice III. Dans cet exercice, on résout à l'aide de la transformée de Fourier l'équation de transport

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} + \frac{1}{c}\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = 0 \tag{11}$$

avec la condition initiale $u(x,0) = f(x)$. On suppose un milieu infiniment étendu selon x.

a) Appliquer la transformée de Fourier spatiale de cette équation et de la condition initiale.
On notera $\hat{u}(\nu,t) \equiv \mathcal{F}_\nu[u(x,t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} u(x,t)e^{-2i\pi\nu x}dx$.

b) Résoudre l'équation différentielle résultante.

c) En déduire la solution par transformée de Fourier inverse. Interpréter cette solution.